§ 69. Независимые события. Умножение вероятностей

Зависимые

Два события называют *зависимыми*, если вероятность появления одного из них меняется в зависимости от того, произойдет другое событие или нет.

Например: на столе лежат 3 белых и 2 чёрных шара. Наудачу берут один шар, не возвращая его на стол. Если появился белый шар (событие A), то вероятность появления белого шара во втором испытании (событие B) $P(B) = \frac{2}{4} = 0{,}5$. Если же в первом испытании появился черный шар (т.е. событие A не произошло), то вероятность $P(B) = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Таким образом, вероятность события B зависит от того, произошло событие A или нет. Следовательно, события A и B являются зависимыми.

Независимые

Два события называются *независимыми*, если появление одного из них не изменяет вероятность появления другого.

Например: опыт состоит в бросании двух монет. Пусть *A* и *B* – события, состоящие в том, что орёл появится соответственно на первой и второй монете. В данном случае вероятность события *A* не зависит от того, произошло событие *B* или нет. Следовательно, событие *A* независимо от события *B*.

События A и B называют независимыми, если выполняется равенство

$$P\,(AB) = P\,(A) \cdot P\,(B).$$

Например подбрасывание 2 кубиков:

A – выпадение “1” на первом игральном кубике.

B – выпадение “6” на втором игральном кубике.

B \ A	1	2	3	4	5	6
1	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
2	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
3	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
4	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

Задача № 1

Выяснить являются ли события А и В независимыми, если:

1) $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}5$; $P(AB) = 0{,}1$.

Решение: Т.к. $P(AB) = 0{,}1 = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = P(A) \cdot P(B)$. Следовательно события А и В являются независимыми.

2) $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{2}{3}$; $P(AB) = \frac{2}{9}$.

Решение: Т.к. $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \neq \frac{2}{9} = P(AB)$. Следовательно события А и В не являются независимыми.

Задача № 2
Пусть наугад называется одно из первых десяти натуральных чисел и рассматриваются события:
А – названо чётное число, В – названо число, кратное пяти.
Выяснить являются ли события А и В независимыми.

Решение: Среди десяти чисел 1, 2, 3 … 8, 9, 10 чётных чисел всего 5, а кратных пяти 2 числа, поэтому Р (А) = $\frac{5}{10}$; Р (В) = $\frac{2}{10}$. Событие АВ состоит в названии числа кратного как 2, так и 5, т.е. кратного 10. Среди данных чисел, число 10 является единственным таким числом. Р (АВ) = $\frac{1}{10}$ = 0,1.
Р (А) · Р (В) = $\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{10}$ = Р (АВ). Следовательно события А и В являются независимыми.

Задача № 3
За офисом наблюдают две независимые друга от друга видеокамеры . Вероятность того , что течение суток первая видеокамера выйдет из строя равна 0,001 , а вероятность того , что выйдет из строя вторая , равна 0,0005 . Найти вероятность , что в течение суток выйдут из строя обе видеокамеры.

Решение: Пусть событие А - выход из строя в течение рассматриваемых суток первой видеокамеры , В - выход из строя в течение тех же суток второй камеры. Согласно условию задачи Р (А) = 0,001; Р (В) = 0.0005. Событие АВ - выход из строя в течение суток обеих видеокамер . Считая события А и В независимыми находим

Р (АВ) = Р (А) · Р(В) = 0,001 · 0,0005 = $5{\cdot}10^{-7}$.

Ответ: $5{\cdot}10^{-7}$

Задача № 4

Вероятность попадания в цель при одном выстреле первым орудием равна 0,8 , а вторым орудием равна 0,7. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одним орудием, после того как они оба, стреляя по цели, сделали по одному выстрелу.

Решение: Пусть “+” обозначает попадание в цель, а “–” означает промах по цели, тогда :

	1 выстрел	2 выстрел
A)	–	–
B)	–	+
C)	+	–
D)	+	+

Нам необходимо найти вероятность хотя бы одного попадания. Этому условию удовлетворяют события B, C, D. Следовательно нам необходимо найти

$P\ (B+C+D) = P\ (\bar{A}) = 1 - P\ (A) = 1 - (1\text{-}0{,}8)\cdot(1\text{-}0{,}7) = 1 - 0{,}2\cdot0{,}3 = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$

Ответ: 0,94.