
Тема урока:

«Вычисление площадей
плоских фигур с помощью
определенного интеграла»

Учитель математики

Гурова Ольга

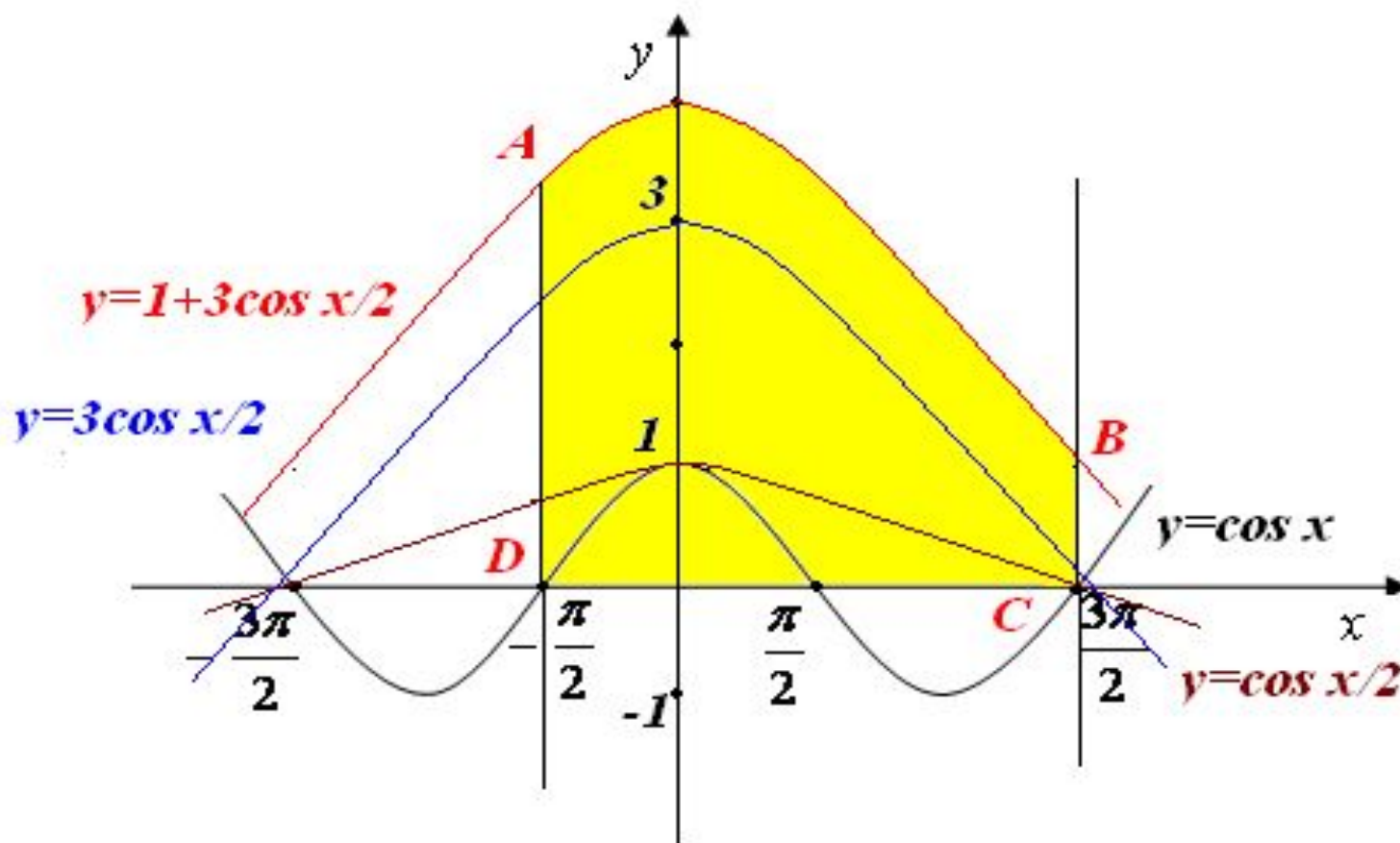
Валериевна

МОУ «Гимназия № 17»



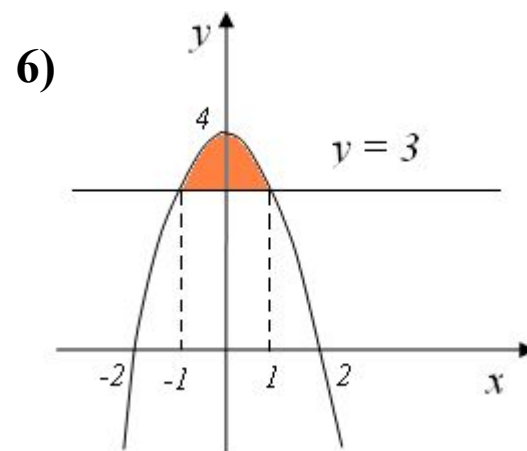
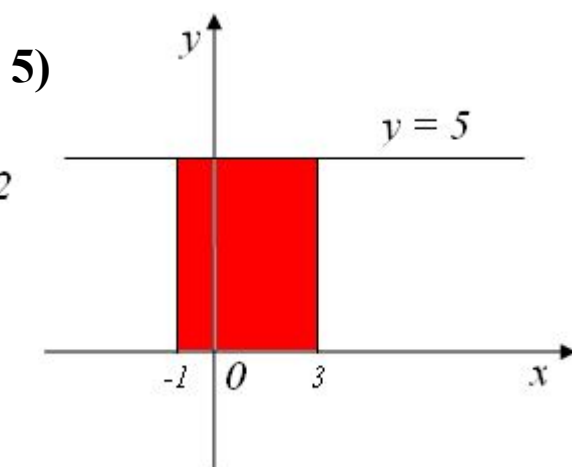
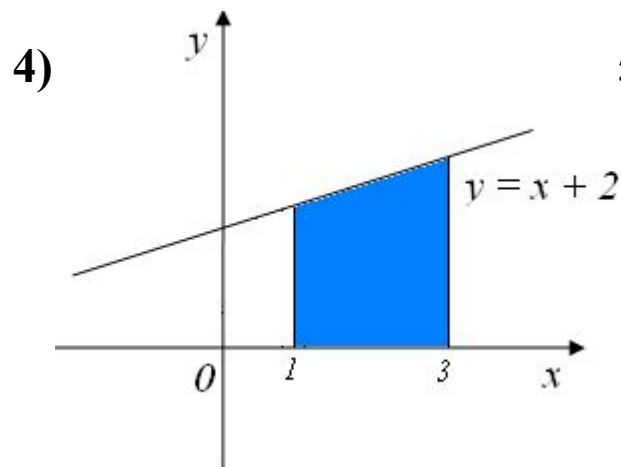
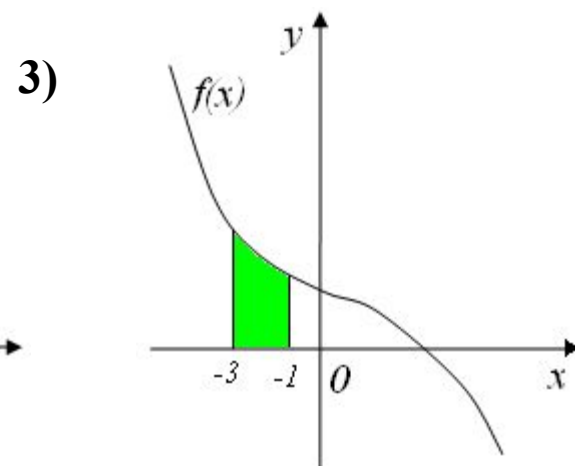
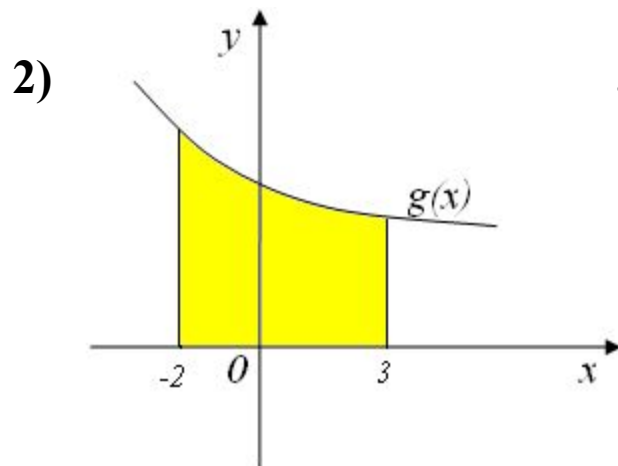
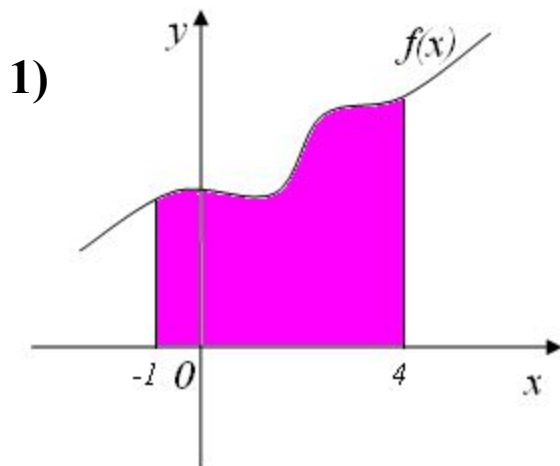
Вычислите площадь фигуры, ограниченной
графиками функций

$$y = 1 + 3\cos\frac{x}{2} \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad x = \frac{3\pi}{2} \quad y = 0$$



Устная работа

1. Выразите с помощью интеграла площади фигур, изображенных на рисунках:



2. Вычислите интегралы:

1). $\int_2^5 x dx$

10,5

2). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

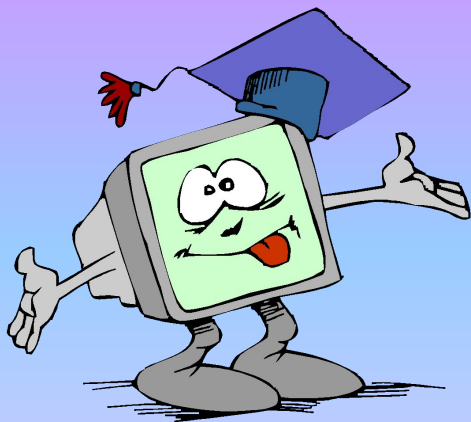
1

3). $\int_0^4 x^3 dx$

64

4). $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos^2 x} dx$

1



Немного истории

«Интеграл» придумал **Якоб Бернулли** (1690г.)

«восстанавливать» от латинского *integro*

«целый» от латинского *integer*



«Примитивная функция»,

от латинского

primitivus — начальный,

ввел

Жозеф Луи Лагранж

(1797г.)



Интеграл в древности

Первым известным методом для расчёта интегралов является метод исчерпания Евдокса (примерно 370 до н. э.), который пытался найти площади и объёмы, разрывая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объём уже известен.



Евдокс Книдский



Архимед

Этот метод был подхвачен и развит Архимедом, и использовался для расчёта площадей парабол и приближенного расчёта площади круга.

Исаак Ньютон

(1643-1727)



Наиболее полное изложение
дифференциального и
интегрального исчислений
содержится в
«Методе флюксий...»
(1670–1671, опубликовано в 1736).

Переменные величины - **флюенты**
(первообразная или
неопределенный интеграл)

Скорость изменения флюент —
флюксии (производная)

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716)



$\int y dx$ - впервые использован
Лейбницем в конце
XVII века

Символ образовался из буквы
S — сокращения слова
summa (сумма)

Определенный интеграл

```
graph TD; A[Определенный интеграл] --> B[И. Ньютон]; A --> C[Г. Лейбниц]; B --> D["\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)  
где F'(x) = f(x)"]; C --> E["\int_b^a f(x)dx = \sum_{i \in [a,b]} f(x_i)dx_i"]; D --> F[Формула Ньютона - Лейбница]; E --> F;
```

И. Ньютон

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

где $F'(x) = f(x)$

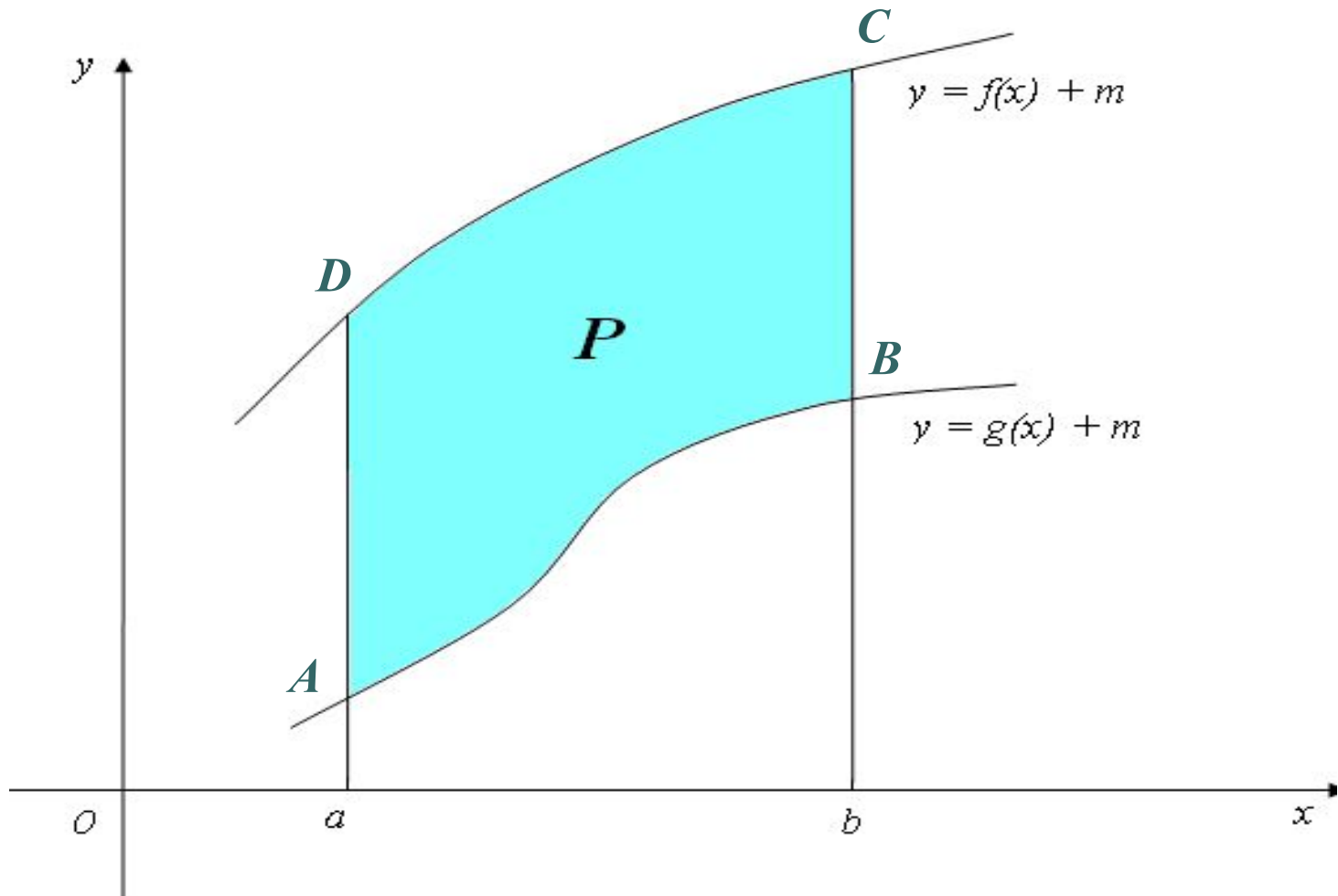
Г. Лейбниц

$$\int_b^a f(x)dx = \sum_{i \in [a,b]} f(x_i)dx_i$$

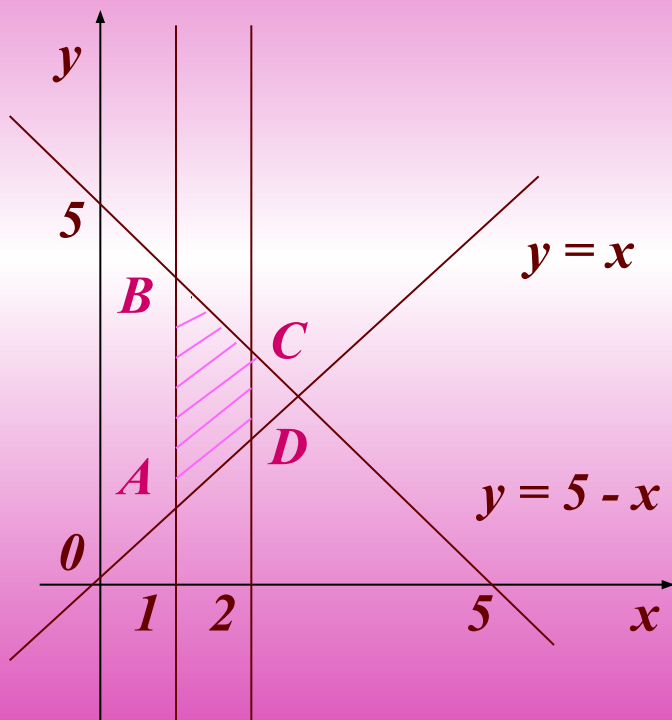
Формула Ньютона - Лейбница

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned}
 S_{ABCD} &= S_{aDCB} - S_{aABb} = \int_a^b (f(x) + m) dx - \int_a^b (g(x) + m) dx = \\
 &= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx
 \end{aligned}$$



Пример. Вычислите площадь фигуры,
ограниченной линиями
 $y = x$, $y = 5 - x$, $x = 1$, $x = 2$.



$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \int_1^2 ((5 - x) - x) dx = \\ &= \int_1^2 (5 - 2x) dx = (5x - x^2) \Big|_1^2 = \\ &= (5 \cdot 2 - 2^2) - (5 \cdot 1 - 1^2) = 2 \end{aligned}$$

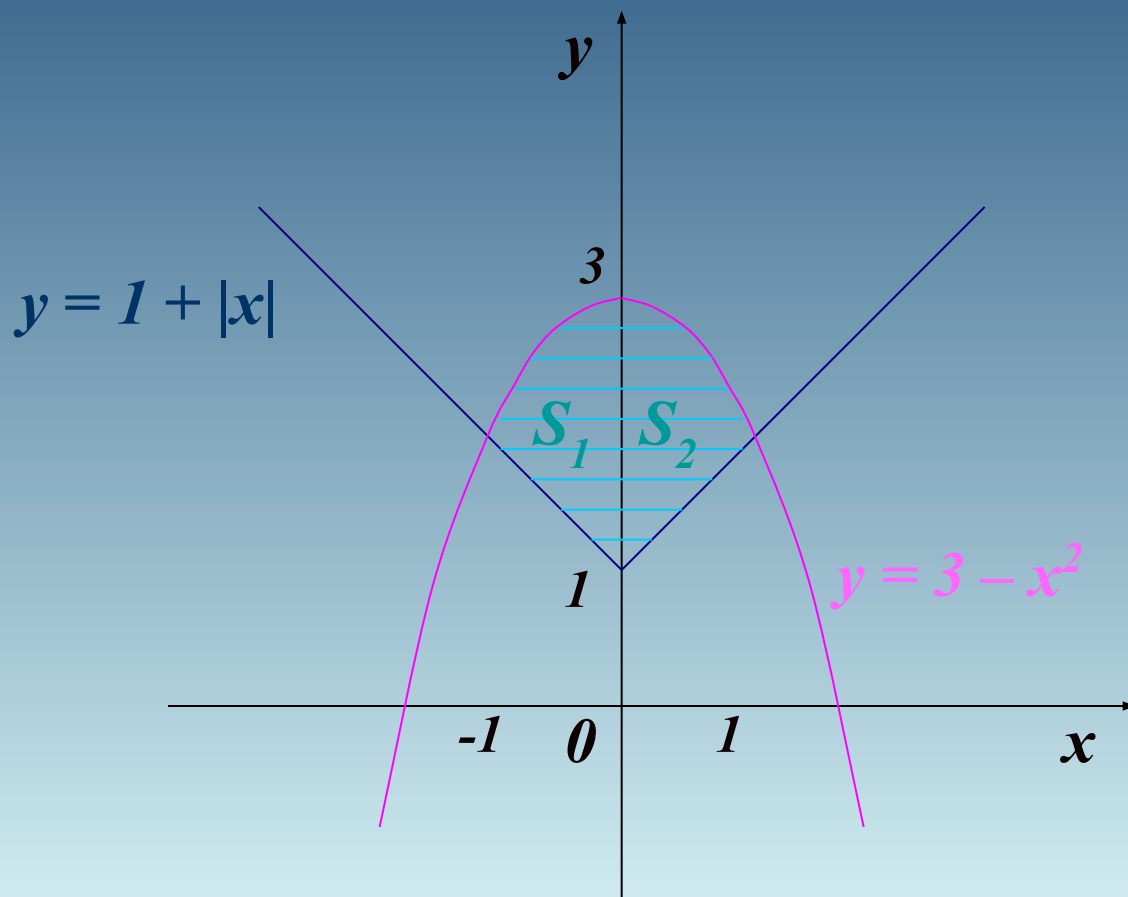
Ответ : 2

Задание 1. Вычислите площадь фигуры,
ограниченной линиями

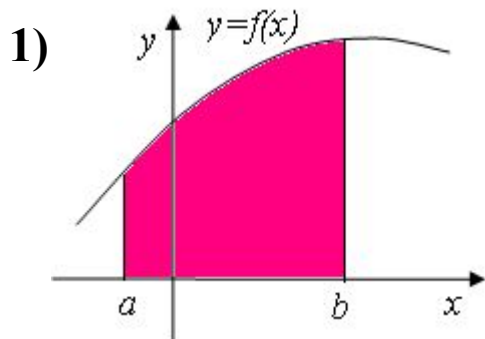
$$y = 3 - x^2,$$

$$y = 1 + |x|$$

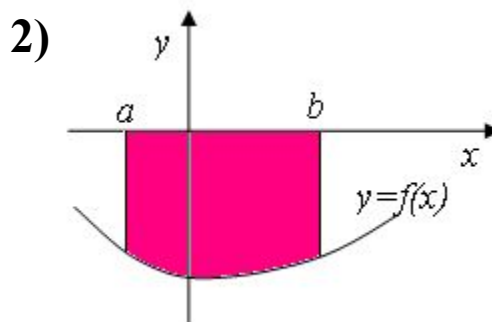
$$S = S_1 + S_2$$



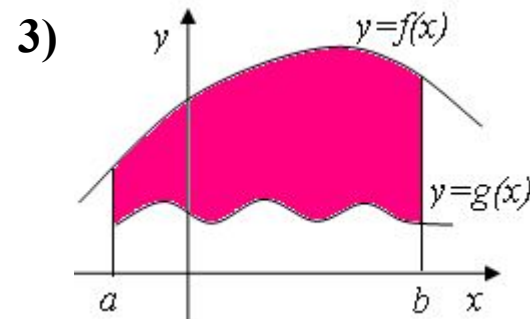
Задание 2. С помощью определенного интеграла записывают формулы для вычисления площадей фигур, заштрихованных на рисунках



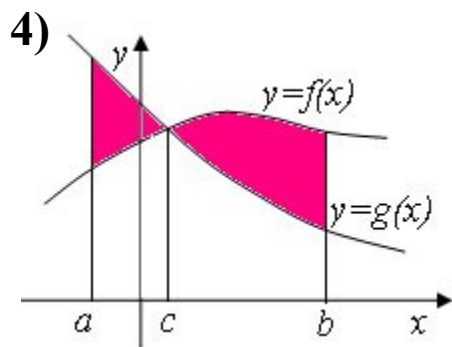
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



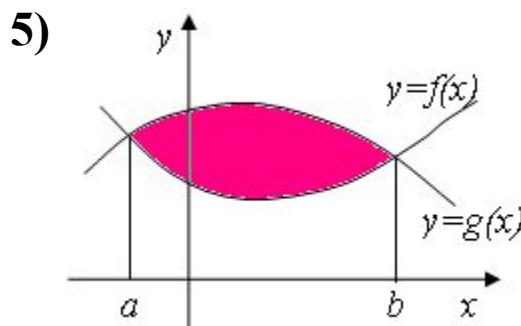
$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$



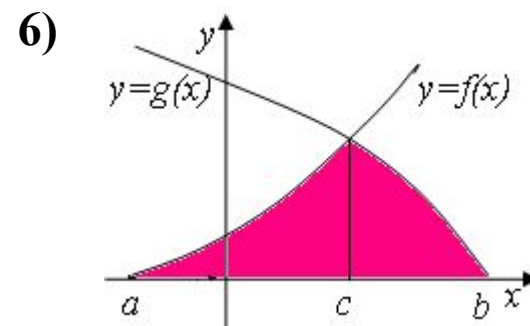
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



$$S = \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx$$

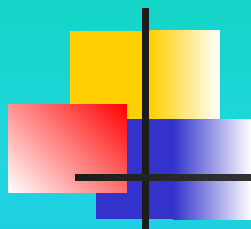


$$S = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$



$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$

Подберите из данных формул для вычисления площади фигуры ту, которая подходит к одному из шести чертежей.



$$S_1 = \int_{-2}^7 \left((4 - (x-1)^2) - ((x+2)^2 + 2) \right) dx \quad \mathbf{5}$$

$$S_2 = \int_{-2}^8 (5 - (x-6)^2 + \sin x) dx \quad \mathbf{3}$$

$$S_3 = \int_{-2}^6 (7 - (x-5)^2) dx \quad \mathbf{1}$$

$$S_4 = \int_{-3}^4 -\frac{4}{x-3} dx + \int_4^8 \left(\frac{1}{x-5} + 3 \right) dx \quad \mathbf{6}$$

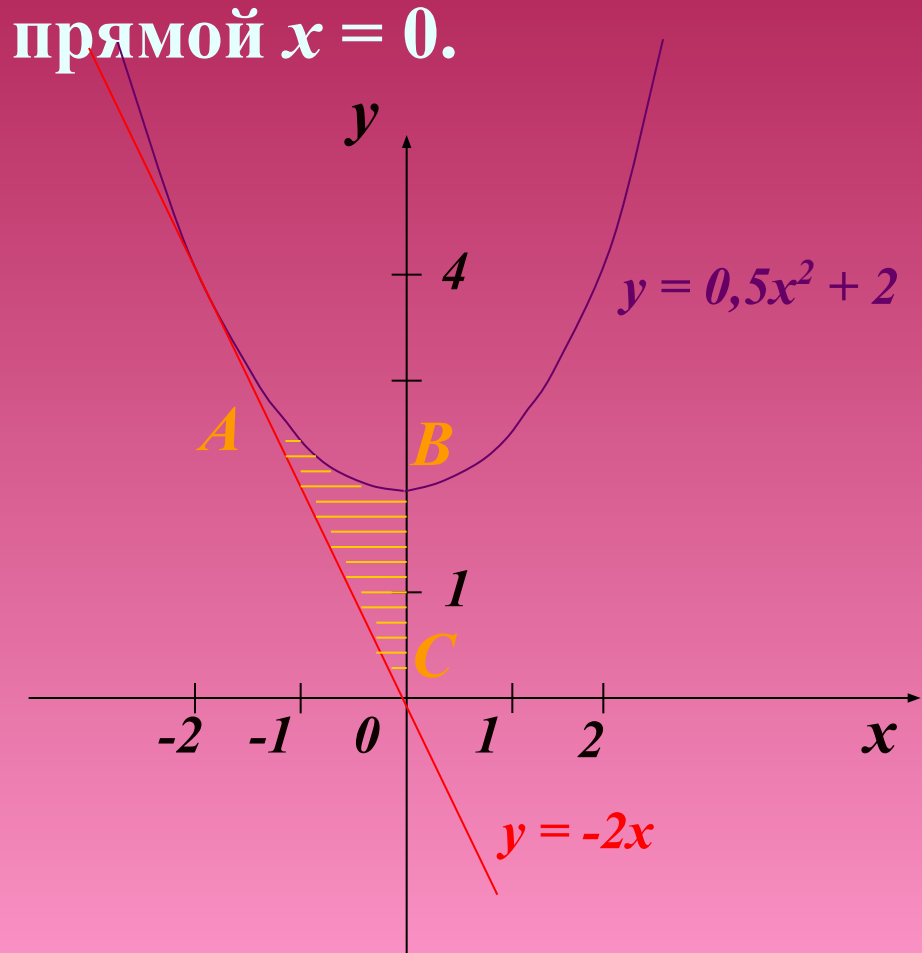
$$S_5 = \left| \int_{-1}^3 (x^2 - 4) dx \right| \quad \mathbf{2}$$

$$S_6 = \int_{-3}^1 \left(\frac{1}{x+4} - ((x-2)^2 + 5) \right) dx + \int_1^6 \left((x-2)^2 + 5 - \frac{1}{x+4} \right) dx \quad \mathbf{4}$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 0,5x^2 + 2$, касательной к этому графику в точке с абсциссой $x = -2$ и прямой $x = 0$.

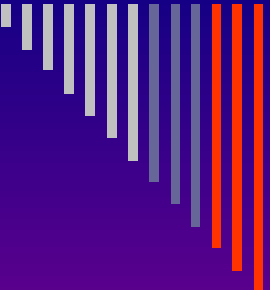
Решение:

1. Составим уравнение касательной.
2. Построим графики функций.
3. Найдем площадь фигуры.



Итоги урока





СПАСИБО ЗА УРОК!

Домашнее задание:

1. *п.4 стр.228 - 230;*
2. *№ 1025(в, г), № 1037(в, г),
№ 1038(в, г)*