

11 класс

# Периодическо тригонометрическ их функций

## Определение:

Функция  $f(x)$  называется **периодической**, если существует такое число  $T \neq 0$ , что для любого  $x$  из области определения этой функции значения  $x+T$  и  $x-T$  также принадлежат области определения и выполняются равенства

$$f(x-T) = f(x) = f(x+T).$$

Число  $T$  называется **периодом** функции  $f(x)$

## Задача 1

Доказать, что  $f(x)=\sin x+1$  является периодической с периодом  $2\pi$

Решение:

Функция  $f(x)=\sin x+1$  определена на  $\mathbb{R}$ .

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+1=\sin x+1=f(x)$$

## Задача 2

Доказать, что функция  $f(x) = \frac{\cos x}{2}$

является периодической с периодом  $2\pi$

Решение:

$$x \in R$$

$$f(x+2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{2} = \frac{\cos x}{2} = f(x)$$

### Задача 3

Доказать, что  $f(x) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

является периодической с периодом  $2\pi$

Решение:

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos\left(x + 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \\ &= \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x) \end{aligned}$$

## Задача 4

Доказать, что функция  $f(x) = \sin 2x$  является периодической с периодом  $T = \pi$

**Решение:**

$$x \in \mathbb{R}$$

$$f(x + \pi) = \sin 2(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x = f(x)$$

## Задача 5

Доказать, что функция  $f(x) = \operatorname{tg} 2x$  является периодической с периодом  $T = \frac{\pi}{2}$

Решение:

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \text{ где}$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}(2x + \pi) = \operatorname{tg} 2x = f(x)$$

## Задача 6

Найти наименьший положительный период функции.

$$f(x) = \sin \frac{3}{2}x$$

Решение:

$$x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$$

$$\sin \frac{3}{2}(x+T) = \sin \frac{3}{2}x$$

$$\sin \frac{3}{2}(x+T) - \sin \frac{3}{2}x = 0$$

$$2 \sin \frac{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}T - \frac{3}{2}x}{2} \cos \frac{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}T + \frac{3}{2}x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{3}{4}T = 0 \quad \frac{3T}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad T = \frac{4}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Наименьший положительный период при  $n=1$   $T = \frac{4\pi}{3}$

**Задача 7** Найти наименьший положительный период функции  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

**Решение:**

$$x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad f(x+T) = f(x)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x+T}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x+T}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{\sin \frac{x+T}{2}}{\cos \frac{x+T}{2}} - \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 0$$

$$\sin \frac{x+T}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x+T}{2} = 0, \quad \cos \frac{x+T}{2} \neq 0, \cos \frac{x}{2} \neq 0$$

$$\sin\left(\frac{x+T}{2} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\sin \frac{T}{2} = 0$$

$$\frac{T}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Наименьший положительный период функции  
при  $n=1$   $T=2\pi$

## Следствие:

Если  $f(x)$  имеет период  $T$ , то  $f(kx)$   
имеет период  $\frac{T}{k}$

Например,  $y = \sin x$   $T = 2\pi$ .  $y = \sin 5x$ ,  $T = \frac{2\pi}{5}$

## Задача 8

Найти наименьший положительный период функции  $y = \cos \frac{2}{5} x$

Решение:

Функция  $y = \cos x$  имеет период  $2\pi$ .

Функция  $y = \cos \frac{2}{5} x$  имеет период

$$\frac{2\pi}{\frac{2}{5}} = 5\pi$$

## Задача 9

Найти наименьший положительный период функции  $y = \sin 2x + \cos 3x$

Решение:

Так как функция  $\sin 2x$  имеет период  $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ,

а функция  $\cos 3x$  имеет период  $T_2 = \frac{2\pi}{3}$ ,

то период  $T$  функции  $y = \sin 2x + \cos 3x$

будет такое наименьшее положительное число, которое кратно

$T_1$  и  $T_2$  одновременно, т.е. наименьшее общее кратное.

$$T = 2\pi$$

## Задача 10

Найти наименьший положительный период функции

$$y = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3\operatorname{tg} \frac{x}{3}$$

Решение:

Так как функция  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  имеет период  $T_1 = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ ,

а функция  $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$  имеет период  $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$ ,

то период  $T$  функции  $y = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3\operatorname{tg} \frac{x}{3}$

будет такое наименьшее положительное число, которое кратно  $T_1$  и  $T_2$

одновременно, т.е. наименьшее общее кратное.

$$T = 6\pi$$