

Угол между прямой и плоскостью. Подготовка к ЕГЭ

Галкин Сергей Михайлович, учитель математики
МБОУ «Гимназия № 41», г. Новоуральск, Свердловская обл.
smgal@bk.ru, smgal.ru

© Галкин С.М. 2012-2017

1. В кубе $A \dots D_1$ найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1 .

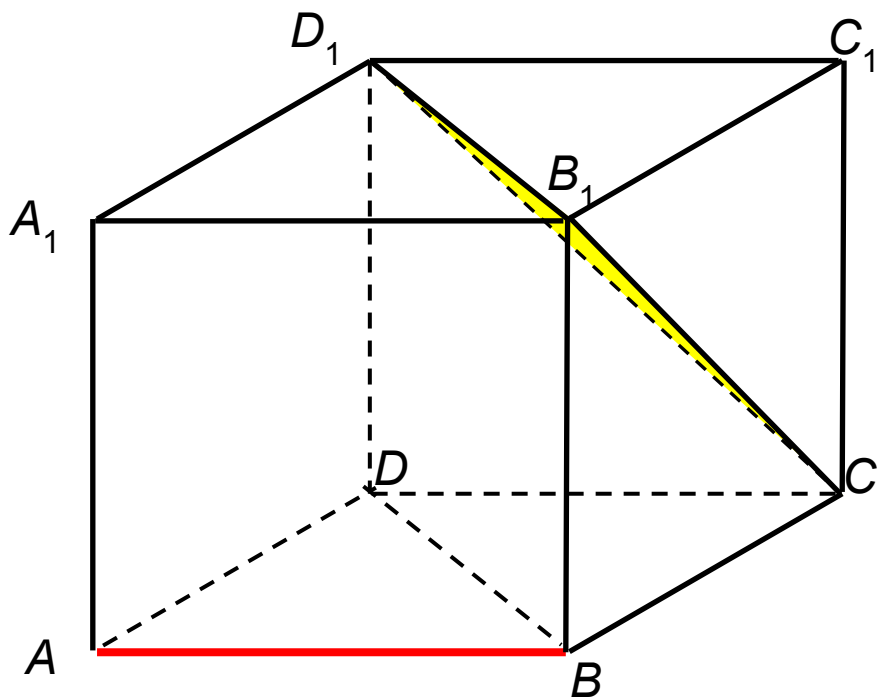
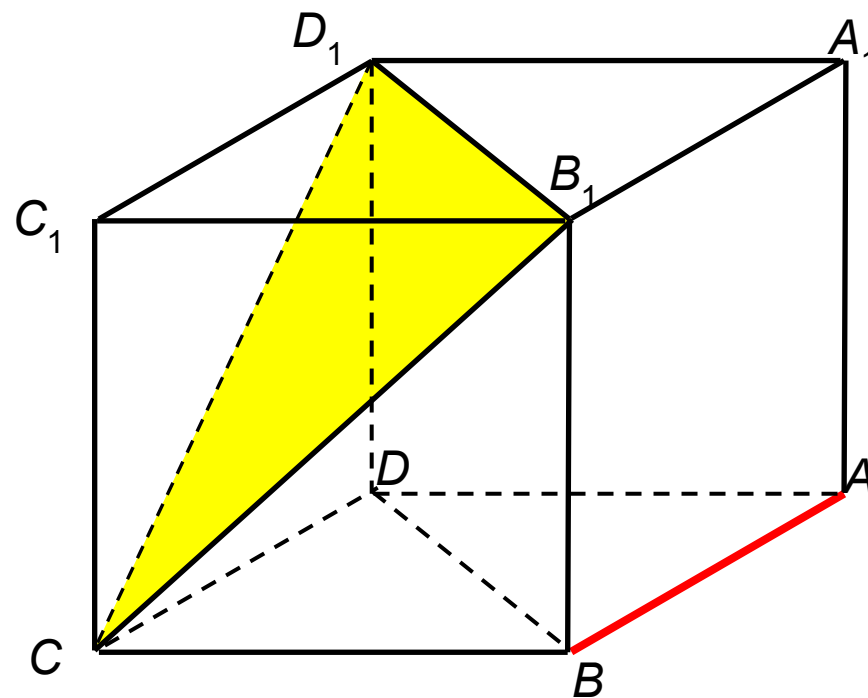
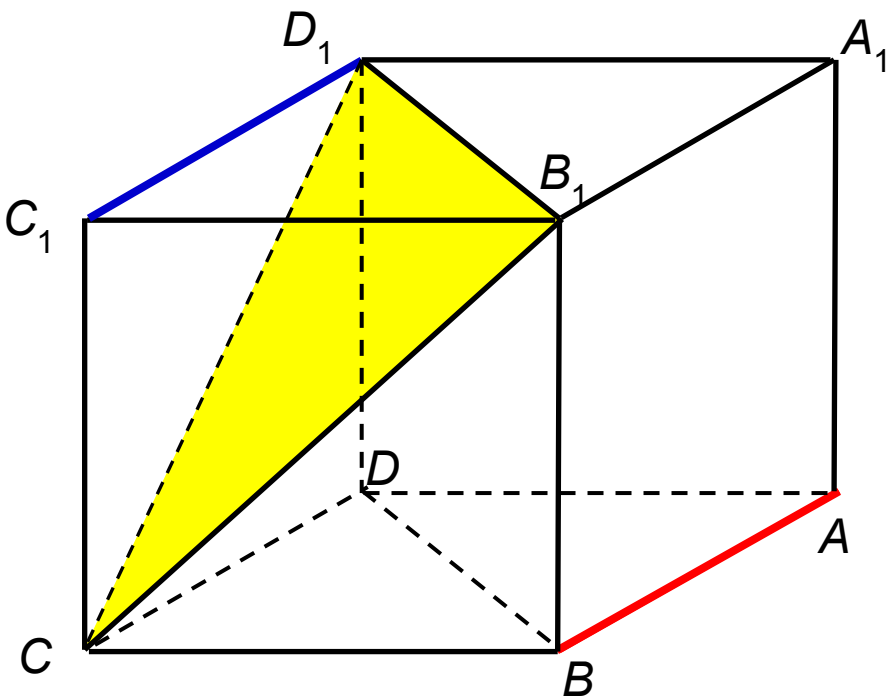


Рисунок неудачный:
плоскость треугольника
 CB_1D_1 плохо
просматривается



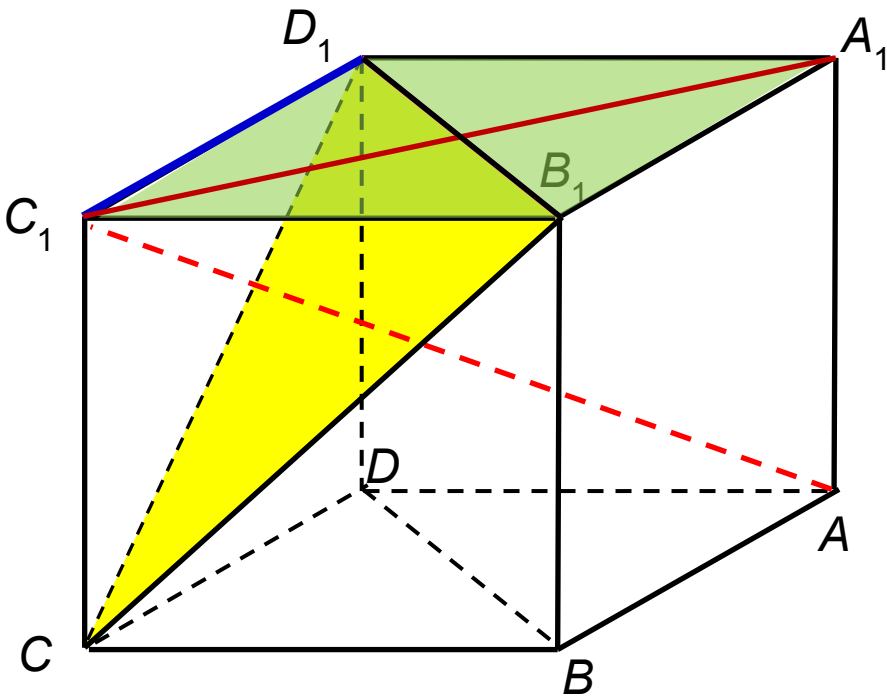
Поменяли местами буквы A и A_1 .
Теперь все хорошо
просматривается.

1. В кубе $A \dots D_1$ найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1 .



Так как $AB \parallel C_1D_1$, то угол между прямой AB и пл. CB_1D_1 равен углу между прямой C_1D_1 и пл. CB_1D_1 .

1. В кубе $A \dots D_1$ найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1 .



Так как $AB \parallel C_1D_1$, то угол между прямой **AB** и пл. CB_1D_1 равен углу между прямой **C_1D_1** и пл. CB_1D_1 .

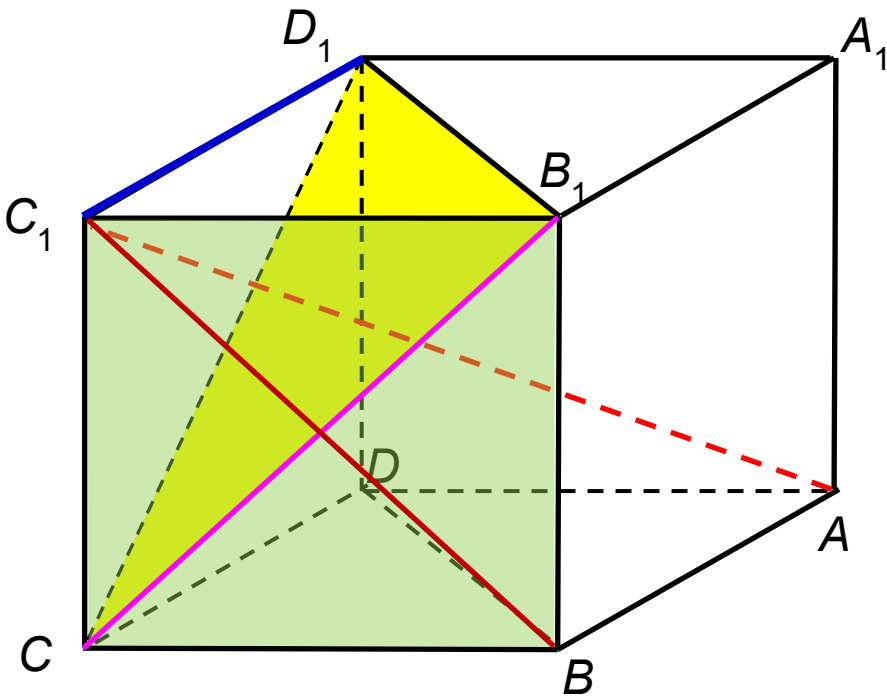
A_1C_1 является проекцией наклонной AC_1 на пл. $A_1B_1C_1D_1$

По теореме о трех перпендикулярах

$$B_1 D_1 \perp AC_1$$

(прямая B_1D_1 лежит в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ и перпендикулярна к проекции AC_1 наклонной AC_1 на плоскость $A_1B_1C_1D_1$ поэтому она (B_1D_1) перпендикулярна и к самой наклонной AC_1)

1. В кубе $A \dots D_1$ найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1 .



Так как $AB \parallel C_1D_1$, то угол между прямой **AB** и пл. CB_1D_1 равен углу между прямой **C_1D_1** и пл. CB_1D_1 .

A_1C_1 является проекцией наклонной AC_1 на пл. $A_1B_1C_1D_1$

По теореме о трех перпендикулярах

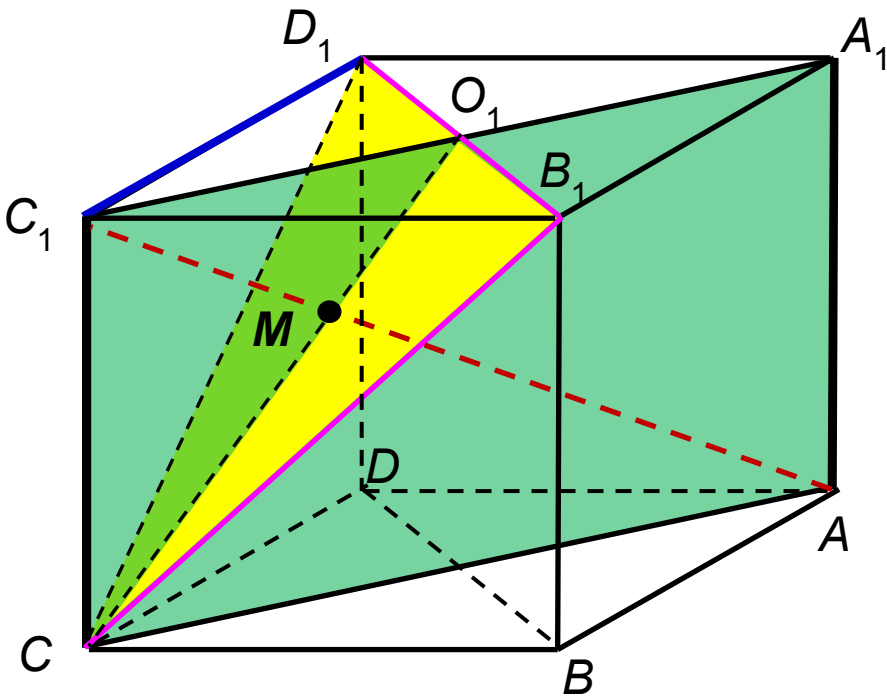
$$B_1 D_1 \perp AC_1$$

(прямая B_1D_1 лежит в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ и перпендикулярна к проекции A_1C_1 наклонной AC_1 на плоскость $A_1B_1C_1D_1$ поэтому она (B_1D_1) перпендикулярна и к самой наклонной AC_1)

Аналогично $CB_1 \perp AC_1$

(прямая CB_1 лежит в плоскости CC_1B_1B и перпендикулярна к проекции BC_1 наклонной AC_1 на плоскость CC_1B_1B поэтому она (CB_1) перпендикулярна и к самой наклонной AC_1)

1. В кубе $A \dots D_1$ найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1 .



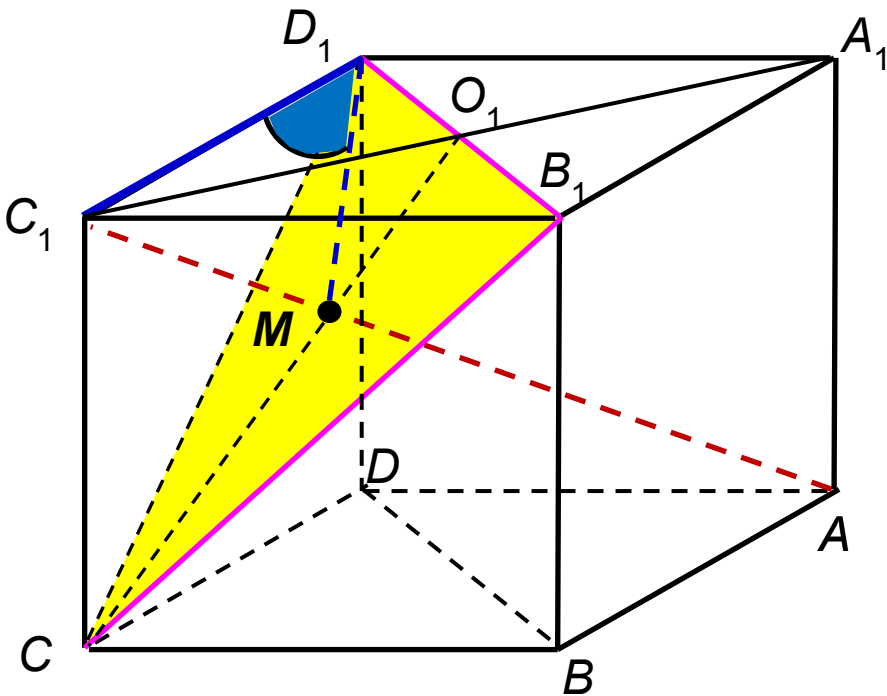
Итак, прямая AC_1 перпендикулярна к двум пересекающимся прямым B_1D_1 и CB_1 , лежащим в плоскости CB_1D_1 , значит, эта прямая перпендикулярна плоскости CB_1D_1 .

Построим точку пересечения прямой AC_1 с плоскостью CB_1D_1 .

Прямая AC_1 лежит в диагональной плоскости AA_1C_1C , которая пересекает верхнюю грань $A_1B_1C_1D_1$ по прямой A_1C_1 , а плоскость CB_1D_1 по прямой O_1C , где O_1 – центр квадрата $A_1B_1C_1D_1$.

Прямые AC_1 и CO_1 лежат в одной плоскости AA_1C_1C и пересекаются в некоторой точке M , которая и является точкой пересечения прямой AC_1 с плоскостью CB_1D_1 .

1. В кубе $A \dots D_1$ найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1 .



Итак, прямая AC_1 перпендикулярна к двум пересекающимся прямым B_1D_1 и CB_1 , лежащим в плоскости CB_1D_1 , значит, эта прямая перпендикулярна плоскости CB_1D_1 .

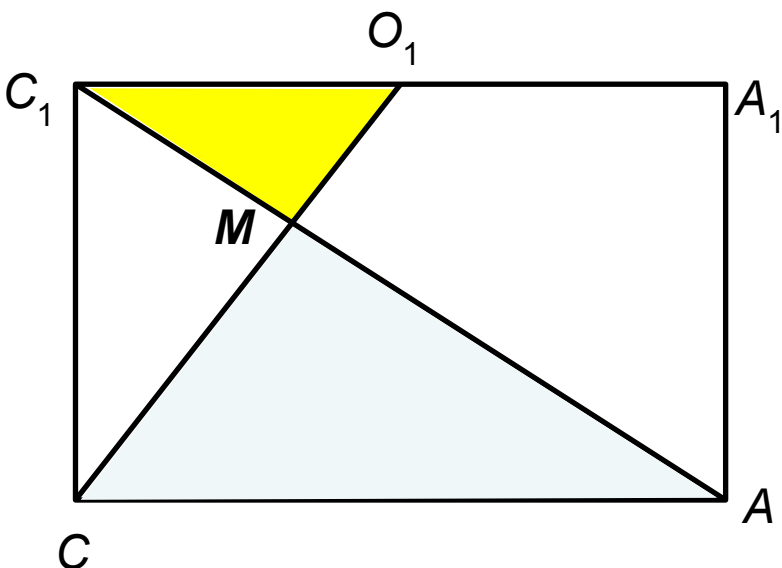
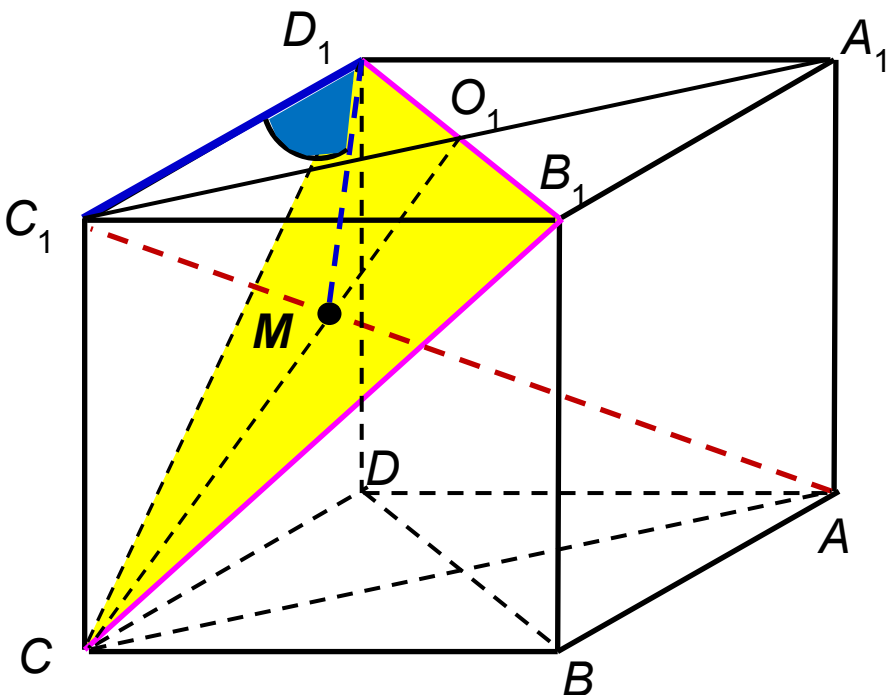
Построим точку пересечения прямой AC_1 с плоскостью CB_1D_1 .

Прямая AC_1 лежит в диагональной плоскости AA_1C_1C , которая пересекает верхнюю грань $A_1B_1C_1D_1$ по прямой A_1C_1 , а плоскость CB_1D_1 по прямой O_1C , где O_1 – центр квадрата $A_1B_1C_1D_1$.

Прямые AC_1 и CO_1 лежат в одной плоскости AA_1C_1C и пересекаются в некоторой точке M , которая и является точкой пересечения прямой AC_1 с плоскостью CB_1D_1 .

Таким образом, C_1M – перпендикуляр к плоскости CB_1D_1 . Тогда MD_1 – проекция C_1D_1 на эту плоскость CB_1D_1 и угол C_1D_1M – искомый угол прямой C_1D_1 (а, значит, и AB) с плоскостью CB_1D_1 .

1. В кубе $A \dots D_1$ найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1 .



Треугольники C_1MO_1 и AMC подобны по двум углам. Откуда

$$\frac{C_1M}{MA} = \frac{C_1O_1}{AC} = \frac{1}{2}$$

Значит, $C_1M = k$, $MA = 2k$, $C_1A = 3k$

$$C_1M = \frac{1}{3} AC$$

Пусть ребро куба равно a . Тогда

$$AC_1 = a\sqrt{3} \quad C_1M = \frac{1}{3} AC_1 = \frac{1}{3} a\sqrt{3}$$

Из прямоугольного треугольника C_1MD_1

$$\sin \angle C_1D_1M = \frac{C_1M}{C_1D_1} = \frac{\frac{1}{3} a\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $A...D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и CB_1D_1 и делится ими на три равные части.

Задача 372. Геометрия 10-11: Учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян и др. 11-е изд. - М. : Просвещение, 2002.

