

Различные способы решения квадратных уравнений

Час науки . Урок с элементами обобщения и
исследования в 8 (матем.) классе

Учитель математики
СОШ №5

г.Симферополя
Проценко Ирина
Александровна

Цель урока:



*формирование представления о
возможности решения квадратных
уравнений различными способами.*

Проблема:

- 1. Изменится ли способ решения квадратного уравнения в зависимости от его вида?*
- 2. Можно ли одно и тоже уравнение решить не единственным способом?*



Ход урока

1. Орг. момент. Математическая зарядка.
2. Повторение и обобщение изученного материала.
3. Лекция (сообщения учащихся о рассмотренном способе решения с примером применения данного способа).
4. Дом. задание
5. Итог урока, выводы



Математическая зарядка

- *Верный ответ - руки вверх , неверный - руки вперед
(наклоны вправо – влево и т.д.)*
- *Предлагаются задания для устного счета с ответом(верным или неверным).Ученики, обдумывая , «сигналят» об ответе .*



2. Повторение и обобщение изученного материала.



1) Универсальная формула.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0$$

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = 0$$

$$X = \frac{-b}{2a}$$

корней нет

$$D < 0$$

Действ.

Пример:

$$6x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 1 + 48 = 49,$$

$D > 0$, два корня.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}; x_2 = \frac{1}{2}$$

2) Формула для четного коэффициента b .

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$b = 2m$$

$$D_1 = m^2 - ac$$

$$D_1 > 0$$

$$D_1 = 0$$

$$D_1 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{D}}{a}$$

Действительных

$$x = \frac{-m}{a}$$

корней нет

Пример: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$D_1 = m^2 - ac = (-2)^2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1,$$

$D > 0$, два корня.

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{1}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} ; x_2 = 1$$

3) Приведенное квадратное уравнение (Старший коэффициент равен единице).

$$x^2 + px + q = 0$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$D > 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$D = 0$$

$$x = -\frac{p}{2}$$

$$D < 0$$

Действит

корней нет

Пример:

$$x^2 - 14x - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm 8$$

$$x_1 = 15, \quad x_2 = -1$$

4) Теорема Виета.

Чтобы числа x_1 и x_2 являлись корнями уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

необходимо и достаточно выполнения равенства

$$x_1 + x_2 = -b/a \text{ и } x_1 x_2 = c/a$$

Теорема Виета позволяет судить о знаках и абсолютной величине квадратного уравнения, а именно:

$$x^2 + bx + c = 0$$

Если $b > 0, c > 0$ то оба корня отрицательны.

Если $b < 0, c > 0$ то оба корня положительны.

Если $b > 0, c < 0$ то уравнение имеет корни разных знаков, причём отрицательный корень по абсолютной величине больше положительного.

Если $b < 0, c < 0$ то уравнение имеет корни разных знаков, причём отрицательный корень по абсолютной величине меньше положительного.

5) Теорема, обратная теореме Виета.

Если числа p , q , x_1 , x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$,
 $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 и x_2 – корни уравнения
 $x^2 + px + q = 0$.

Пример: $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 = 7 & x_1 = 3, \\ x_1 \cdot x_2 = 12 & x_2 = 4 \end{array}$$

6) Разложение левой части уравнения на множители.

- Решим уравнение $x^2 + 10x - 24 = 0$.

Решение: Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0.$$

Так как произведение равно нулю, то по крайней мере один из его множителей равен нулю.

Поэтому левая часть уравнения обращается в нуль при $x = 2$, а также при $x = -12$. Это означает, что числа 2 и -12 являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.

7) Метод выделения полного квадрата.

- **Пример**

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$

Выделим в левой части полный квадрат. Для этого запишем выражение

$x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3.$$

В полученном выражении первое слагаемое – квадрат числа x , а второе – удвоенное произведение x на 3. поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2 , так как

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2.$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая 3^2 . Имеем:

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 3)^2 - 16 = 0, \text{ т.е. } (x + 3)^2 = 16.$$

Следовательно, $x + 3 = 4$, $x_1 = 1$, или $x + 3 = -4$, $x_2 = -7$.

8). Графическое решение квадратного уравнения

Если в уравнении

$$x^2 + px + q = 0$$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$$x^2 = -px - q.$$

Построим графики зависимостей $y = x^2$ и $y = -px - q$.

График первой зависимости – парабола, проходящая через начало координат.

График второй зависимости – прямая.

Возможны следующие случаи: прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;

- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;

- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

Пример: Решим графически уравнение

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

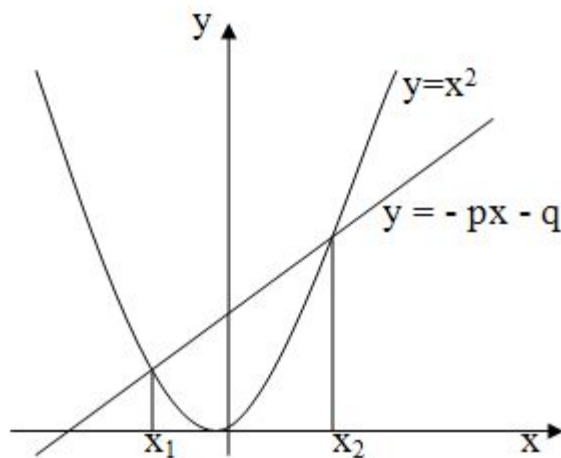
$$x^2 = 3x + 4$$

Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3x + 4$.

Прямую $y = 3x + 4$ можно построить по двум точкам $M(0;4)$ и

$N(3;13)$.

Прямая и парабола пересекаются в двух точках A и B с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$



Новые способы решений квадратных уравнений

9) Решение уравнений способом «переброски»

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

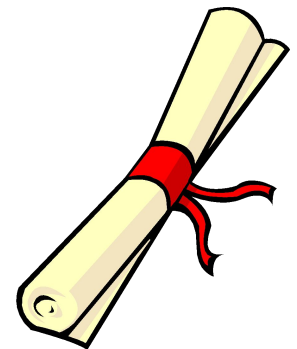
Умножая обе его части на a , получаем уравнение

$$a^2 x^2 + a bx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$$y^2 + by + ac = 0,$$

равносильного данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_2 = y_2/a$. При этом коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его и называют способом «переброски». Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.



Пример : Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Решение. «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение

$$y^2 - 11y + 30 = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$\begin{bmatrix} y_1 = 6 \\ y_1 = 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = \frac{6}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 2.5 \end{bmatrix}$$

10). Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

Графический способ решения квадратных уравнений с помощью параболы неудобен. Если строить параболу по точкам, то потребуется много времени, и при этом степень точности получаемых результатов невелика.

Предлагаем следующий способ нахождения корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

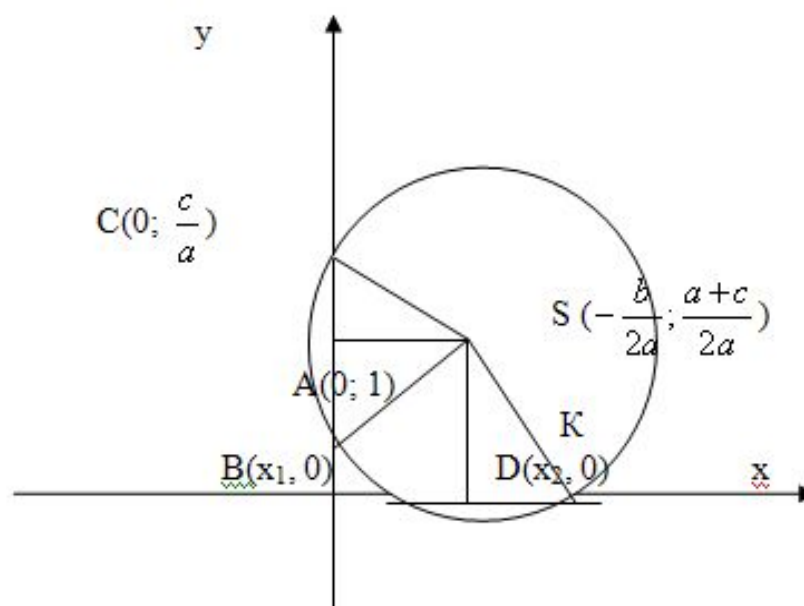
с помощью циркуля и линейки.

Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, и проходит через точки $A(0; 1)$ и $C(0;)$ на оси ординат. Тогда по теореме о секущих имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, откуда

$$OC = (OB \cdot OD) : OA = (x_1 \cdot x_2) : 1 = c/a$$

Пример:

- 1) построим точки $S(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a})$ (центр окружности) и $A(0;1)$;
- 2) проведем окружность с радиусом SA ;
- 3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью Ox являются корнями квадратного уравнения.



2. Решим уравнение

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

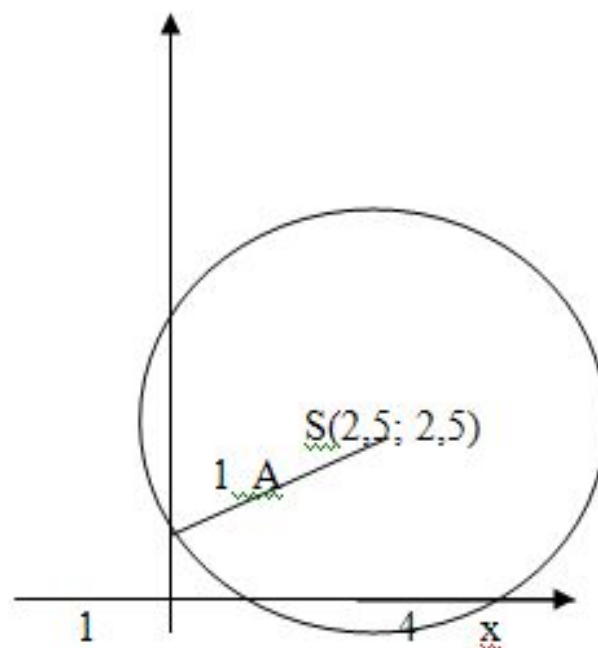
Решение. Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 1} = 2,5,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1+4}{2 \cdot 1} = 2,5.$$

Проведем окружность радиуса $\frac{1}{2}A$, где $A(0;1)$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.



Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ в зависимости от соотношения между коэффициентами a, b, c .

- **1) Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$,**

- **$x_2 = c/a$.**

-

- **Пример: $2x^2 + 3x - 5 = 0$**

- **$2 + 3 - 5 = 0$, значит**

- **$x_1 = 1; x_2 = -5/2$**



2) Если $a - b - c = 0$, то $x_1 = -1$;
 $x_2 = -c/a$.

- **Пример:** $2x^2 + 3x - 1 = 0$
- $2 - 3 + 1 = 0$, значит
- $x_1 = -1; x_2 = 1/2$



3) Если $a = c = n$, $b = n^2 + 1$, т. е.
 $nx^2 + (n^2 + 1)x + n = 0$, то
 $x_1 = -n$; $x_2 = -1/n$

- **Пример:** $2x^2 + 5x + 2 = 0$
- $5 = 2^2 + 1$, $n = 2$
- $x_1 = -2$; $x_2 = -1/2$
-



4) Если $a = c = n$, $b = -(n^2+1)$, т. е.
 $nx^2 - (n^2+1)x + n = 0$, то
 $x_1 = n$; $x_2 = 1/n$

- **Пример:** $3x^2 - 10x + 3 = 0$
- $3x^2 - (3^2+1)x + 3 = 0$
- $x_1 = 3$; $x_2 = 1/3$



5) Если $ax^2 + (a^2 - 1)x - a = 0$, то
 $x = -a$; $x = 1/a$

- **Пример:** $5x^2 + (5^2 - 1)x - 5 = 0$
- $x = -5$, $x = 1/5$



6) Если $ax^2 - (a^2 - 1)x - a = 0$, то
 $x = a$, $x = -1/a$

- **Пример:** $5x^2 - (5^2 - 1)x - 5 = 0$
- $x = 5$, $x = -1/5$



Дом. задание:



*Используя 1-6 способы решения кв.уравнений
в зависимости от соотношений между
коэффициентами ,составить уравнения и
решить их.*

Вывод: все рассмотренные способы решения квадратных уравнений могут быть использованы при решении квадратных уравнений .



Спасибо за урок!

Успехов всем!

