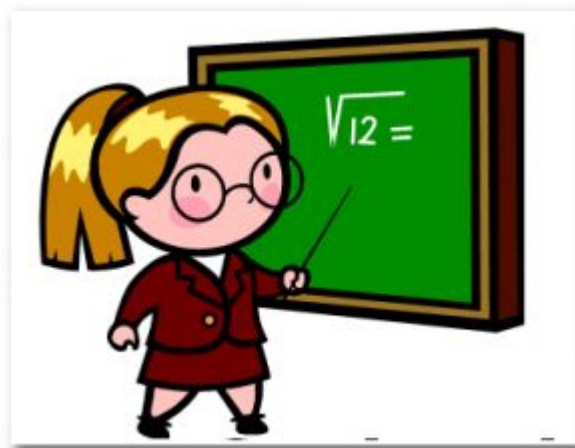


Корни: исторические сведения и задачи

**Яковлева Татьяна Петровна,
доцент кафедры математики и физики
Камчатского государственного
университета имени Витуса Беринга,
кандидат педагогических наук, доцент,
г. Петропавловск - Камчатский**

Исторические сведения



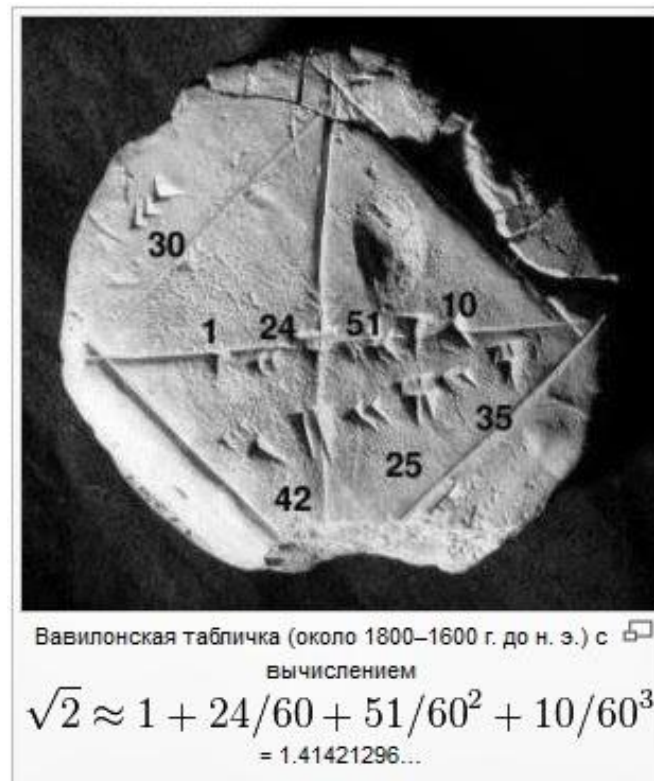
✓ Первые задачи, связанные с извлечением квадратного корня, обнаружены в трудах вавилонских математиков. Среди таких задач:

✓ Применение теоремы Пифагора для нахождения стороны прямоугольного треугольника по известным двум другим сторонам.

✓ Диагональ разбивает квадрат на 2 одинаковых прямоугольных треугольника, в каждом из которых она выполняет роль гипотенузы. Поэтому, как следует из теоремы Пифагора, длина диагонали квадрата равна

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

✓ Сразу же возникает соблазн достать микрокалькулятор и нажать клавишу извлечения квадратного корня.



- Но даже самый высокопроизводительный компьютер, сколько бы долго он ни работал, никогда не сможет ни рассчитать все десятичные цифры.
- И хотя у Пифагора и его учеников компьютера не было, обосновали этот факт именно они. Пифагорейцы доказали, что у диагонали квадрата и его стороны общей меры (т.е. такого отрезка, который целое число раз откладывался бы и на диагонали, и на стороне) не существует.
- Следовательно, отношение их длин – число $\sqrt{2}$ – нельзя выразить отношением некоторых целых чисел m и n .



- Нахождение стороны квадрата, площадь которого задана.
- Решение квадратных уравнений.
- Греки сформулировали проблему удвоения куба, которая сводилась к построению кубического корня с помощью циркуля и линейки. Проблема оказалась неразрешимой. Численные алгоритмы извлечения кубического корня опубликовали Герон и индийский математик Ариабхата I.



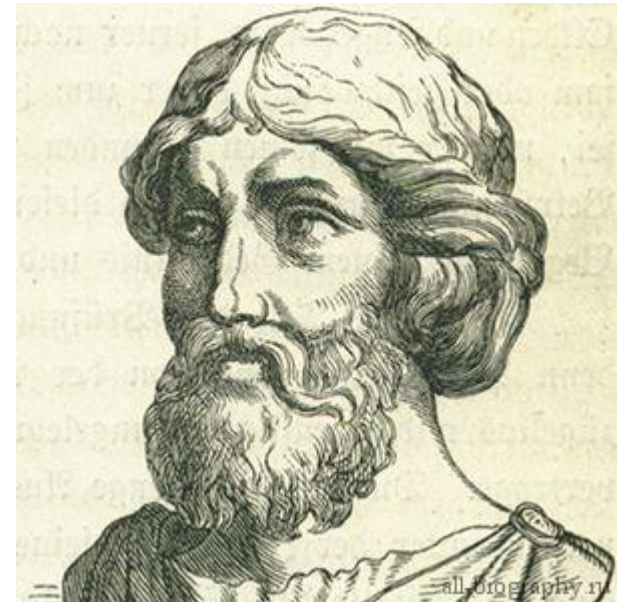
- Алгоритмы извлечения корней любой степени из целого числа, разработанные индийскими и исламскими математиками, были усовершенствованы в средневековой Европе.
- После появления формулы Кардано началось применение в математике мнимых чисел, понимаемых как квадратные корни из отрицательных чисел.
- Основы техники работы с комплексными числами разработал в XVI веке Рафаэль Бомбелли, который также предложил оригинальный метод вычисления корней (с помощью цепных дробей).



- ✓ Открытие формулы Муавра показало, что извлечение корня любой степени из комплексного числа всегда возможно и не приводит к новому типу чисел.
- ✓ Комплексные корни произвольной степени в начале XIX века глубоко исследовал Гаусс, хотя первые результаты принадлежат Эйлеру.
- ✓ Чрезвычайно важным открытием (Галуа) стало доказательство того факта, что не все алгебраические числа (корни многочленов) могут быть получены из натуральных с помощью четырёх действий арифметики и извлечения корня.

$$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3;$$
$$\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2.$$

- Пифагор (570 – 490 года до н.э.) – древнегреческий математик, философ. Родился Пифагор в Сидоне Финикийском. Факты биографии Пифагора не известны достоверно.
- О его жизненном пути можно судить лишь из произведений других древнегреческих философов. По их мнению, математик Пифагор общался с известнейшими мудрецами, учеными того времени. Он вернулся на Самос из поездки в Египет .
- Однако позже самому Пифагору пришлось уехать в Метапонт, поскольку наряду с последователями, у философа и ученого было много противников.



Пифагор

- Как математик Пифагор достиг больших успехов. Ему приписывают открытие и доказательство теоремы Пифагора, создание таблицы Пифагора.
- Философское учение Пифагора можно разделить на две части – научную и религиозную. Поскольку Пифагор считал свое учение тайной и практиковал только устную передачу его ученикам, собрания сочинений после него не осталось.
- Ряд историков сомневаются в том, что знаменитая теорема Пифагора была доказана именно им, аргументируя это тем, что она была известна другим древним народам.
- Помимо доказательства теоремы Пифагора, этому математику приписывают подробное изучение целых чисел, пропорций и их свойств. Пифагорейцам принадлежит значительная заслуга в придании геометрии характера науки.

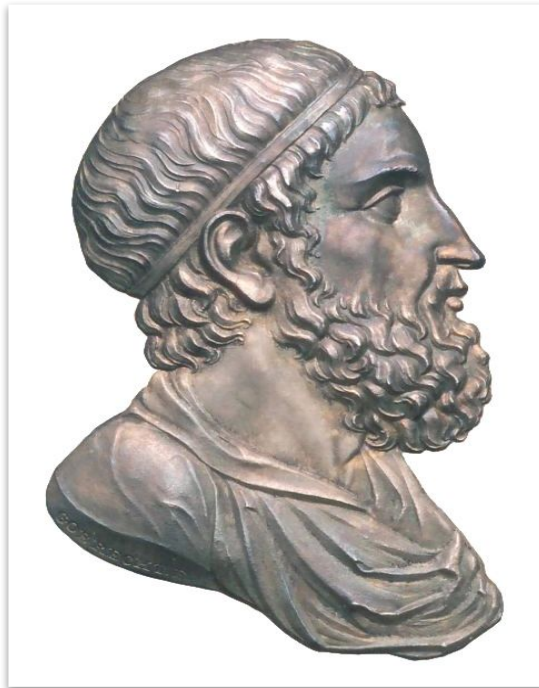


Пифагор



Герон

- Герон Александрийский — греческий математик и механик. Время жизни отнесено ко второй половине первого века н. э. на том основании, что он приводит в качестве примера лунное затмение 13 марта 62 г. н. э.
- Подробности его жизни неизвестны. Герона относят к величайшим инженерам за всю историю человечества. Он первым изобрёл автоматические двери, прибор для измерения протяжённости дорог (древний одометр) и др.
- Занимался геометрией, механикой, гидростатикой, оптикой. Основные произведения: Метрика, Пневматика, Механика (произведение сохранилось целиком в арабском переводе), Катоптрика (наука о зеркалах; сохранилась только в латинском переводе) и др.
- В 1814 году было найдено сочинение Герона «О диоптре», в котором изложены правила земельной съёмки, фактически основанные на использовании прямоугольных координат.



Герон

- «Метрика» (Μετρική) Герона и извлечённые из неё «Геометрика» и «Стереометрика» представляют собой справочники по прикладной математике. Среди содержащихся в «Метрике» сведений:
- Формулы для площадей правильных многоугольников.
- Объёмы правильных многогранников, пирамиды, конуса, усечённого конуса, тора, шарового сегмента.
- Формула Герона для расчёта площади треугольника по длинам его сторон (открытая Архимедом).
- Правила численного решения квадратных уравнений.
- Алгоритмы извлечения квадратных и кубических корней (см. Итерационная формула Герона).
- В основном изложение в математических трудах Герона догматично — правила часто не выводятся, а только показываются на примерах.
- Книга Герона «Определения» представляет собой обширный свод геометрических определений.

- ✓ **Этимология**— раздел лингвистики изучающий происхождение слов.
- ✓ Термин «корень» имеет долгую и сложную историю.
- ✓ Извлечение квадратного корня древние греки понимали строго геометрически: как нахождение стороны квадрата по известной его площади.
- ✓ После перевода на санскрит греческое слово «сторона» превратилась в «мула» (основание). Слово «мула» имело также значение «корень», поэтому при переводе индийских сиддхант на арабский использовался термин «джизр» (корень растения).
- ✓ Впоследствии аналогичное по смыслу слово «radix» закрепилось в латинских переводах с арабского, а через них и в русской математической терминологии («корень», «радикал»).



- ✓ Средневековые математики, например, Кардано обозначали квадратный корень символом «Rx», сокращение от слова «radix».
- ✓ Современное обозначение впервые употребил немецкий математик Кристоф Рудольф, из школы алгебраистов, в 1525 году. Происходит этот символ от стилизованной первой буквы того же слова «radix».
- ✓ Черта над подкоренным выражением вначале отсутствовала; её позже ввёл Декарт для иной цели (вместо скобок), и эта черта вскоре слилась со знаком корня.
- ✓ Показатель степени появился в знаке корня благодаря Валлису и «Универсальной арифметике» Ньютона.

Лист E iiij, Vo.: Надо заметить, что radix quadrata (квадратный корень) будет в этом algorithmo (способе вычисления) обозначаться ради краткости знаком $\sqrt{}$: так, $\sqrt{4}$ означает radicem quadratam из 4.

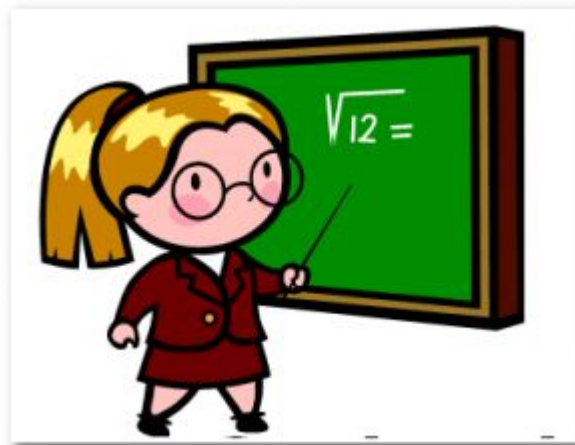
Лист (Evi), Rū.: Всякое число, снабженное простой $\sqrt{}$, двойной $\sqrt{}$ или тройной точкой $\sqrt[3]{}$, называется в этой книге деноминативным числом (т. е. подрадикальным числом). Наоборот, всякое число, которому не предшествует такая точка, называется абсолютным, прими это во внимание.

Лист (E vij), Vo.: Radix cubica обозначается в этом algorithmo через следующий знак $\sqrt[3]{}$. Таким образом $\sqrt[3]{8}$ означает radix cubica из 8.

Некоторые немецкие коссисты XV в. обозначали квадратный корень точкой впереди числа или выражения. В скорописи точки заменяли черточками, позже перешедшими в символ $\blacklozenge$. Так, в рукописи, написанной в 1480 г. на латинском языке, один такой символ точки перед числом ($\blacklozenge$) означал квадратный корень, два таких знака ($\blacklozenge\blacklozenge$) — корень четвертой степени, а три ($\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$) — кубический корень.



Исторические задачи



Задачи Ал-Кархи

(Из трактатов «Кафи-фил-Гисаб» и «Ал-Факри»)

Ал-Кархи (XI век), автор двух трактатов «Кафи-фил-Гисаб» («Все известное в арифметике») и «Ал-Факри» - обширное сочинение по алгебре. В первом трактате много внимания уделено и геометрии.

Задача 1. Сложить $\sqrt{2} + \sqrt{18}$ пользуясь тождеством: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$.

Решение: $\sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{18})^2} = \sqrt{2 + 18 + 2\sqrt{36}} = \sqrt{20 + 12} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$.



Задача 2. Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = y^2 \\ xz = 10. \end{cases}$$

Решение: $y = \frac{10}{x}, z = \frac{100}{x^3}$, тогда: $x^2 + \frac{100}{x^2} = \frac{10000}{x^6}$;

$$10000 = 100x^4 + x^8;$$

$$x^4 = -50 + \sqrt{12500} ;$$

$$x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{12500} - 50}}.$$

Ответ: $\sqrt{\sqrt{\sqrt{12500} - 50}}.$



Задачи Бхаскара Акариа

Из трактата «Венец астрономического учения»

Бхаскара-Акариа (род. 1114 г.), знаменитый индусский математик (приставка «акариа» означает «мудрец», «ученый»), автор трактата «Сидданта-сиромани». Введение к нему содержит арифметику – «Лилавати», что буквально означает «прекрасная», и алгебру – «Виджа Ганита» (вычисление корней).

Задача 3. Преобразование корней. Показать, что:

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Решение:
$$\begin{aligned} \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} &= \sqrt{2 + 3 + 5 + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 2\sqrt{3 \cdot 5}} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$



Задачи Кристофа Рудольфа

Кристоф Рудольф, автор популярнейшего алгебраического трактата «Coss».

Задача 4. Разделить $\sqrt[3]{216}$ на $\sqrt[4]{16}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{216} : \sqrt[4]{16} &= \sqrt[12]{216^4 : 16^8} = \\ &= \sqrt[12]{2176782336 : 46656} = \sqrt[12]{531441} = \\ &= \sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{27} = 3.\end{aligned}$$

Ответ: 3.



Задача Симона Стевина

Стевин, Симон (1548-1620), голландский инженер, которого можно по справедливости считать изобретателем десятичных дробей (трактат «La Disme», 1585).

Задача 5. Решить $\sqrt{\sqrt{3x^2} + \sqrt{2x}} \cdot \sqrt{\sqrt{5x^2} + \sqrt{4x}}$.

Решение:
$$\begin{aligned} & \sqrt{\sqrt{3x^2} + \sqrt{2x}} \cdot \sqrt{\sqrt{5x^2} + \sqrt{4x}} = \\ & = \sqrt{\sqrt{15x^4} + \sqrt{12x^8} + \sqrt{10x^3} + \sqrt{8x^3}}. \end{aligned}$$

Ответ:
$$\sqrt{\sqrt{15x^4} + \sqrt{12x^8} + \sqrt{10x^3} + \sqrt{8x^3}}.$$



Задача Маклорена

Маклорен, Колин (1698-1746), профессор университета в Эдинбурге, математик, известный своими трудами по высшему анализу («Трактат о флюксиях») и особенно исследованиями свойства кривых, главным образом третьего порядка. Его имя обычно связывают с разложением функций в ряд по степеням аргумента, хотя ряд этот был известен и до него, и был им только впервые опубликован.

Задача 6. Преобразовать: $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}.$

Решение:
$$\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{16} + 2 + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16} + 2 + \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{20}(2^2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})(2^2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4})} =$$
$$= \frac{2^3\sqrt[3]{40} + 2^3\sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{80}}{2} = 2^3\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{10}.$$

Ответ: $2^3\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{10}.$



Список литературы

- 1) Глейзер Г.И. История математики школы /Г.И. Гейзер. - М: Просвещение. - 1982.- 241 с.
- 2) Кымпан Ф. История числа π / Ф. Кымпан. – М.: Наука, 1971 – 216 с.
- 3) Алгебра: учеб. Для 6 кл. сред. шк. / под ред. С. А. Теляковского. – М.: Просвещение, 1987-268 с.
- 4) Школьникам о математике и математиках / Сост. М. М. Лиман. – М.: Просвещение, 1994 – 80 с.
- 5) [ru.wikipedia.org/wiki/Арифметический корень](http://ru.wikipedia.org/wiki/Арифметический_корень)
- 6) [ru.math.wikia.com/wiki/ Арифметический корень](http://ru.math.wikia.com/wiki/Арифметический_корень)
- 7) glovl.ru
- 8) www.matematike.net/algebra
- 9) uztest.ru/abstracts