- Вот другой взгляд- высокий: учитесь , читайте , размышляйте и извлекайте из всего самое полезное . Когда ум просветлеет , вы узнаете, кто вы и что вы.

Н.И.Пирогов

Иррациональные уравнения

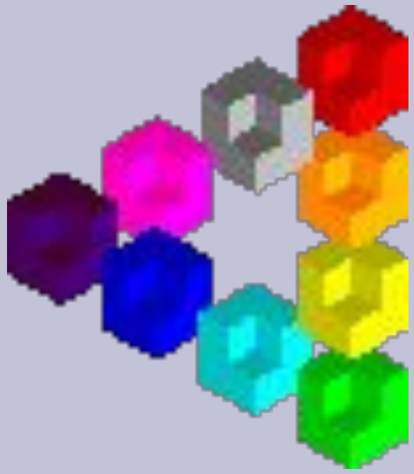
Тема урока

Иррациональные уравнения

Цели урока

- Обобщить и систематизировать знания и умения при решении иррациональных уравнений, рассмотреть способы решения типовых уравнений
- Развивать умение выделять главное, существенное в изучаемом материале, обобщать факты и понятия, развивать самостоятельность, мышление, познавательный интерес.
- Содействовать формированию мировоззренческих понятий.

Устная работа



Определение

- **Иррациональными называются уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в дробную степень.**

Посторонние корни

- Основными причинами появления посторонних корней является возведение обеих частей уравнения в одну и ту же ***чётную*** степень, расширение области определения и др.
- По этим причинам необходимой частью решения иррационального уравнения является ***проверка***, либо использование ***области определения*** заданного уравнения.

- В некоторых случаях можно сделать вывод о решении иррационального уравнения, не прибегая к преобразованиям.
- Например, уравнения

$$\sqrt{5x-2}=-1$$

$$\sqrt[4]{x-5}=3-x$$

не имеют решения.

Устно:

Какие из следующих уравнений являются иррациональными?

а) $x + \sqrt{x} = 2$

б) $x + \sqrt{x} = 0$

в) $x\sqrt{7} = 11 + x$

г) $y^2 - 3\sqrt{2} = 4$

д) $y + \sqrt{y^2 + 9} = 2$

е) $\sqrt{x - 1} = 3$

❷Является ли число корнем уравнения:

а) $\sqrt{x-1}=\sqrt{2-x}$,

$x_{0=4}$

б) $\sqrt[3]{2-x}=\sqrt[3]{x-2}$, $x_0=2$

в) $\sqrt{x-5}=\sqrt{2x-13}$,

$x_0=6$

г) $\sqrt{1-x}=-\sqrt{1-x}$,

$x_0=0$

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень

1. Преобразовать обе части уравнения к виду

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$$

2. Возвести обе части в *n-ую* степень

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = \left(\sqrt[n]{g(x)}\right)^n$$

3. Учитывая, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ получаем:

$$f(x) = g(x)$$

4. Решить полученное уравнение и выполнить проверку (или ОДЗ)

Пример

$$\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$$

Воспользуемся формулой куба разности двух чисел

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

Ответ:-109; 80.

Если квадратных корней в иррациональном уравнении много, то приходится возводить в квадрат несколько раз:

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$$

Решение:

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}-4=0$$

уединим корень

$$\sqrt{2x-3}=4-\sqrt{4x+1}$$

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=\left(4-\sqrt{4x+1}\right)^2$$

$$2x-3=16-8\sqrt{4x+1}+4x+1$$

$$2x-3-16-4x-1=-8\sqrt{4x+1}$$

$$-2x-20=-8\sqrt{4x+1}\,\Big|\,:(-2)$$

$$x+10=4\sqrt{4x+1}$$

$$x+10=4\sqrt{4x+1}$$

$$\left(x+10\right)^2=\left(4\sqrt{4x+1}\right)^2$$

$$x^2+20x+100=16(4x+1)$$

$$x^2+20x+100=64x+16$$

$$x^2-44x+84=0, \textit{по т. Виета}$$

$$x_1+x_2=44, \quad x_1\cdot x_2=84,$$

$$x_1=42, \quad x_2=2.$$

Проверка

$Проверка: при\ x = 42$

$\sqrt{2\cdot 42-3}+\sqrt{4\cdot 42+1}-4=0$

$\sqrt{81}+\sqrt{169}-4=0$ – *неверное рав – во,*

$x = 42$ *не является корнем,*

при $x = 2$

$\sqrt{2\cdot 2-3}+\sqrt{4\cdot 2+1}-4=0$

$\sqrt{1}+\sqrt{9}-4=0$ – *верное равенство,*

$x = 2$ *является корнем.*

Ответ: $x = 2.$

Равносильные переходы

$$\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x), \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$$

Примеры:

$$\sqrt{x-2} = x-8$$

$$\begin{cases} x-2 = (x-8)^2, \\ x-8 \geq 0 \end{cases}$$

Ответ:11

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x-3};$$

$$\begin{cases} x+2 = 2x-3 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases}$$

Ответ:5

Уравнения, в которых одно или несколько подкоренных выражений точные квадраты.
Пример

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 10$$

- Ответ: -3,5; 6,5

Метод замены переменной

1. Ввести новую переменную
2. Решить уравнение, отбросить посторонние корни
3. Вернуться к первоначальному неизвестному

- Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения.
- Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал.
- При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример 1

$$\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = \frac{5}{2}$$

Решение

ОДЗ:x≠1,x≠0.

Обозначим

$\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}$ **=t ,где t≠0.**

Ответ: -1/511; 2

Пример 2

$$2x^2 + 3x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 33, \quad x \in R.$$

Пусть $y = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, \quad y \geq 0,$

тогда исходное уравнение примет вид:

$$y^2 + y - 42 = 0.$$

$y_1 = -7, \quad y_2 = 6$

Решая уравнение

$$\sqrt{2x^2+3x+9}=6$$

получим:

$x = 3,$

$x = -\ 4{,}5$

Ответ: $-4{,}5;3.$

Самостоятельная работа

Решите уравнение

Вариант 1

а) $\sqrt{3x-2}=4-x$

б) $\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=3$

в) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=1$

г) $\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[6]{x+1}=3$

Вариант 2

а) $\sqrt{3x+1}=x-1$

б) $\sqrt{7-\sqrt{x+1}}=2$

в) $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2+8x+16}=3$

г) $3\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4$

Ответы:

Вариант 1:а)2;9. б)17 в)2;3 г)0

Вариант 2: а)0;5 б)10 в)-5;-2 г)-2;2.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

п. 33

№423(б)

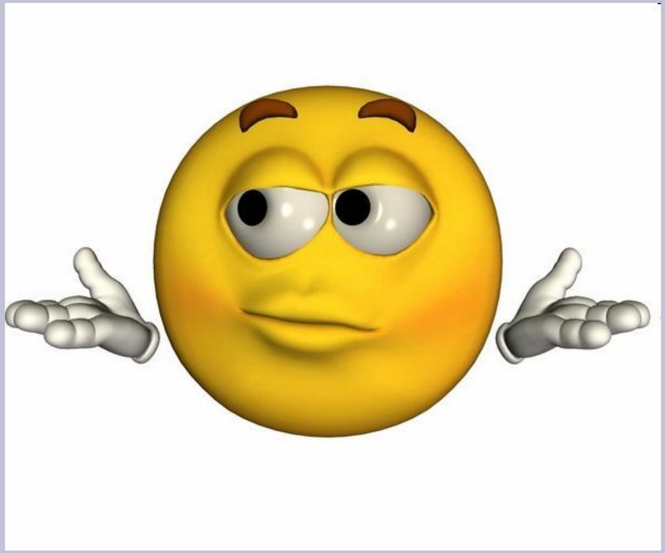
№424(б, в)

425 (в, г)

Итоги урока

Рефлексия

- Ваше настроение



Спасибо за урок!