

Решение простейших тригонометрических уравнений.

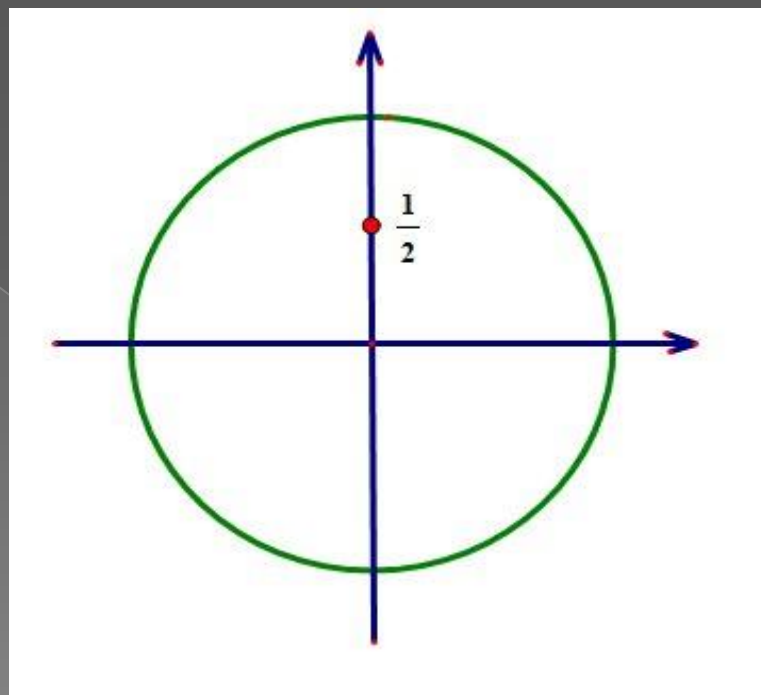
Решение простейших тригонометрических уравнений

Решение тригонометрических уравнений любого уровня сложности в конечном итоге сводится к **решению простейших тригонометрических уравнений**. И в этом наилучшим помощником снова оказывается тригонометрический круг. Вспомним определения косинуса и синуса.

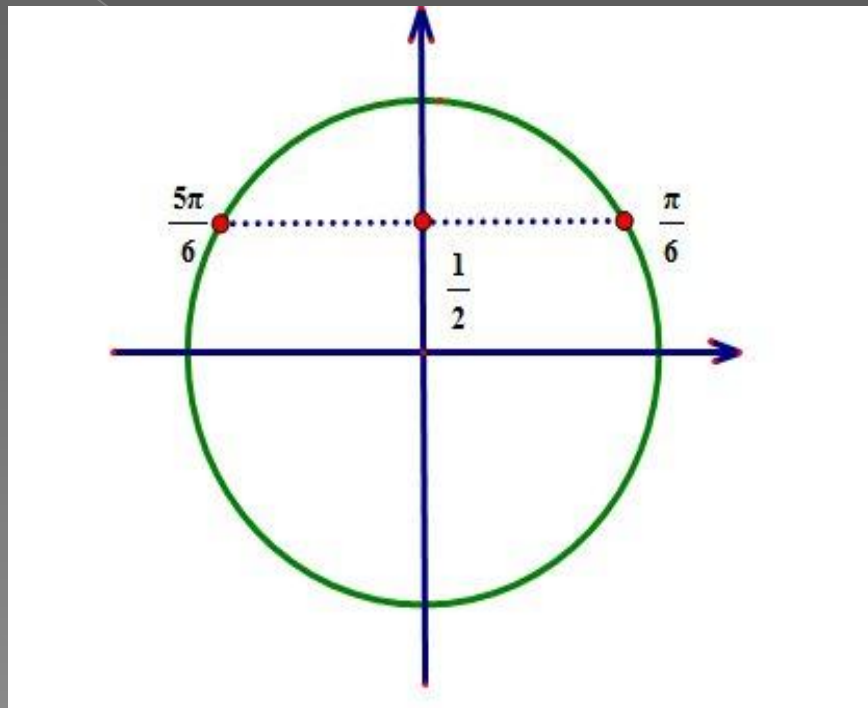
Косинусом угла α называется абсцисса (то есть координата по оси Ox) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α .
Синусом угла α называется ордината (то есть координата по оси Oy) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α .

Решим уравнение $\sin x = 1/2$
Этому уравнению
удовлетворяют все такие
значения угла поворота x ,
которые соответствуют
точкам окружности,
ордината которых равна
 $1/2$.

Отметим на оси ординат
точку с ординатой $1/2$:



Проведем горизонтальную линию параллельно оси абсцисс до пересечения с окружностью. Мы получим две точки, лежащие на окружности и имеющие ординату $1/2$. Эти точки соответствуют углам поворота на $\pi/6$ и $5\pi/6$ радиан:



Если мы, выйдя из точки, соответствующей углу поворота на $\pi/6$ радиан, обойдем полный круг, то мы придем в точку, соответствующую углу поворота на $\pi/6 + 2\pi$ радиан и имеющую ту же ординату. То есть этот угол поворота также удовлетворяет нашему уравнению. Мы можем делать сколько угодно «холостых» оборотов, возвращаясь в ту же точку, и все эти значения углов будут удовлетворять нашему уравнению.

То есть первая серия решений исходного уравнения имеет вид:

То есть первая серия решений исходного уравнения имеет вид:

$x_1 = \pi/6 + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел

вторая серия решений имеет вид:

$$x_2 = 5\pi/6 + 2\pi k$$

Эти две серии решений
можно объединить в одну
запись:

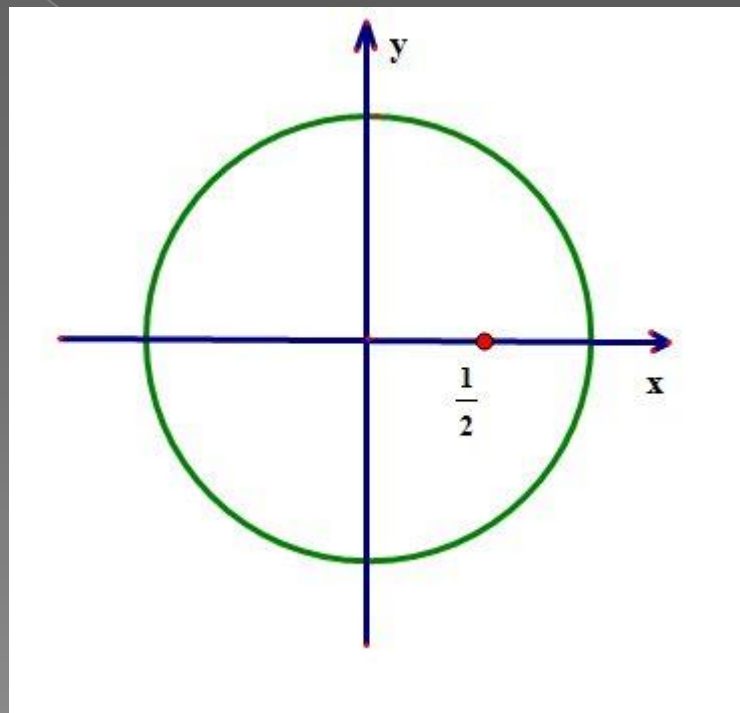
$$x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$$

Если мы в этой записи возьмем $n=2k$ (то есть четное n), то мы получим первую серию решений.

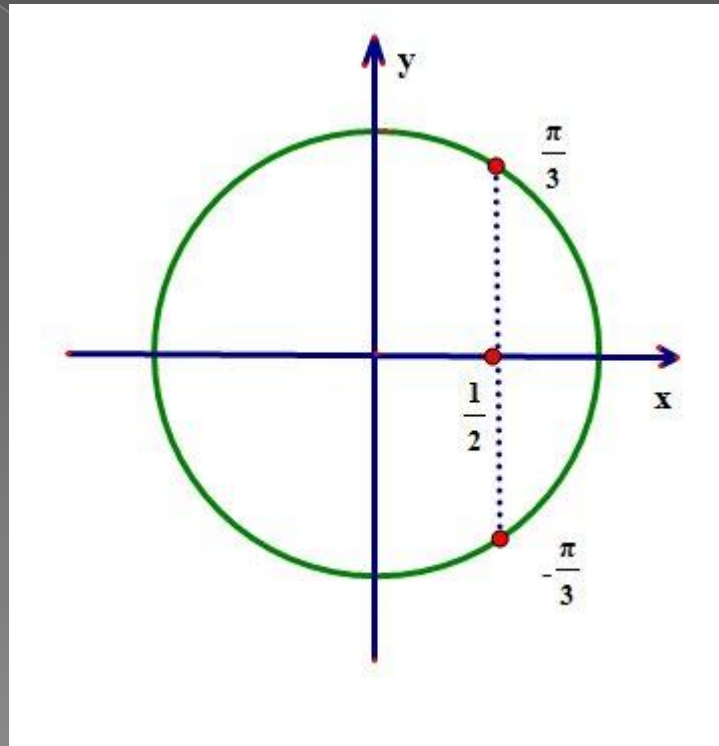
Если мы в этой записи возьмем $n=2k+1$ (то есть нечетное n), то мы получим вторую серию решений.

Теперь давайте решим
уравнение $\cos x = 1/2$.

Так как $\cos x$ – это абсцисса точки
единичной окружности,
полученной поворотом на угол x ,
отметим на оси Ox точку с
абсциссой $1/2$:



Проведем вертикальную линию параллельно оси ОУ до пересечения с окружностью. Мы получим две точки, лежащие на окружности и имеющие абсциссу $1/2$. Эти точки соответствуют углам поворота на $\pi/3$ и $-\pi/3$ радиан. Вспомним, что при движении по часовой стрелки мы получаем отрицательный угол поворота:



Запишем две серии
решений:

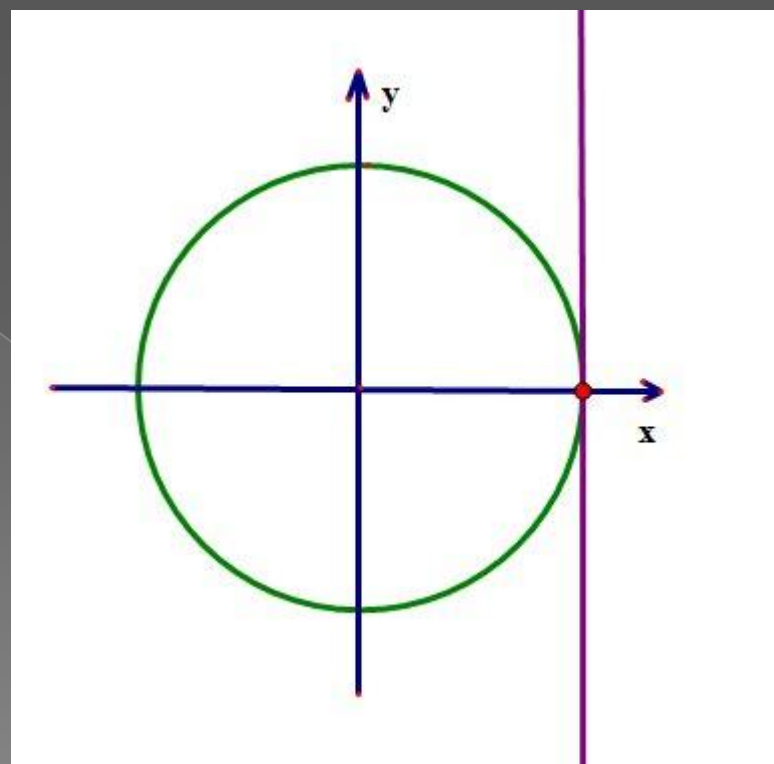
$$x_1 = \pi/3 + 2\pi k$$

$$x_2 = -\pi/3 + 2\pi k$$

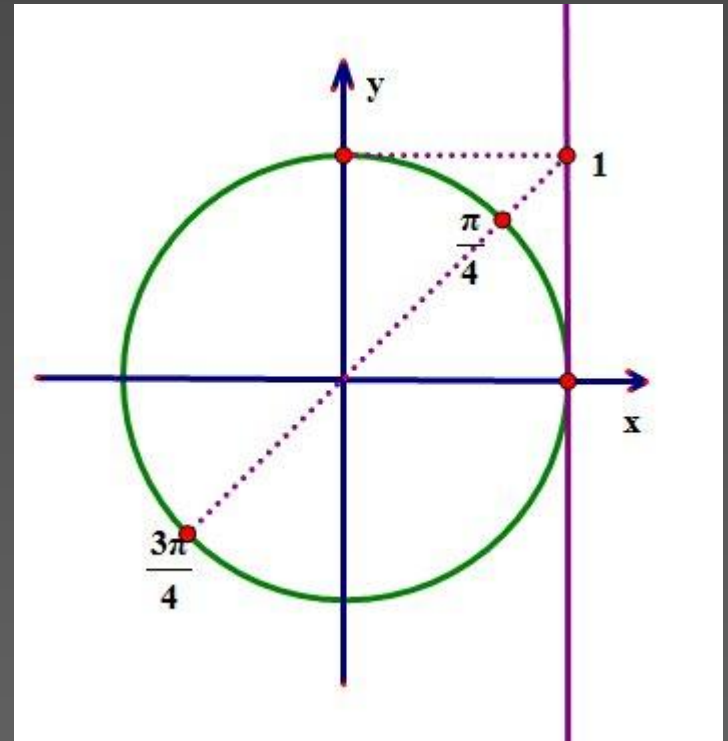
Объединим эти две серии
в одну запись:

$$x = \pm \pi/3 + 2\pi n$$

Решим
уравнение $\operatorname{tg} x = 1$.
Линия тангенсов
проходит через точку с
координатами $(1, 0)$
единичной окружности
параллельно оси OY :



Отметим на ней точку, с ординатой равной 1 (мы ищем, тангенс каких углов равен 1):

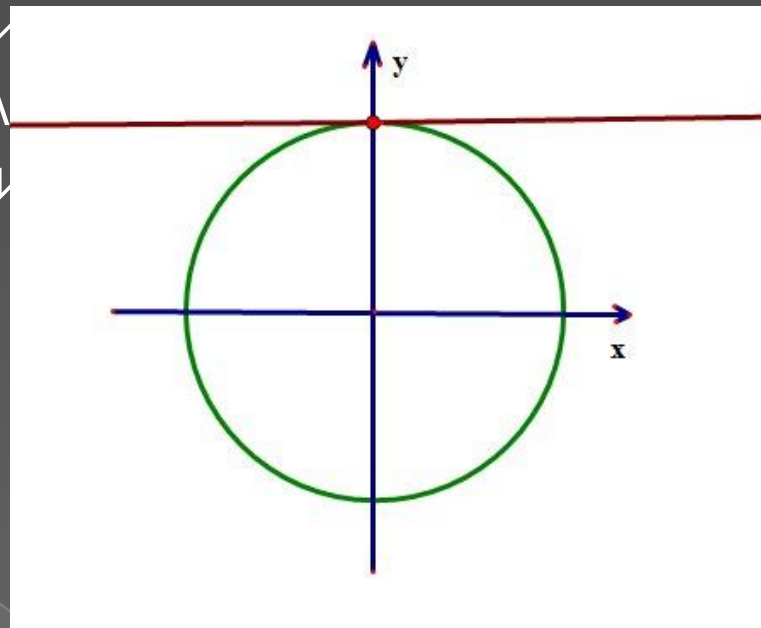


Так как точки, соответствующие углам поворота, которые удовлетворяют нашему уравнению лежат на расстоянии π радиан друг от друга, то мы можем записать решение таким образом:

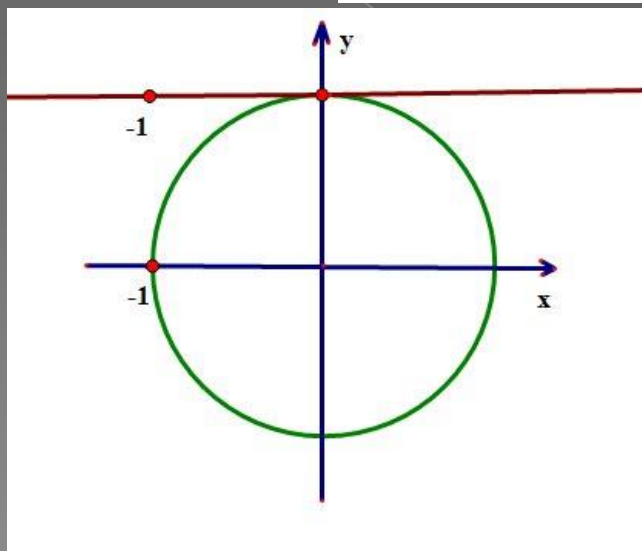
$$x = \pi/4 + \pi n$$

Решим уравнение $\text{ctg} x = -1$.

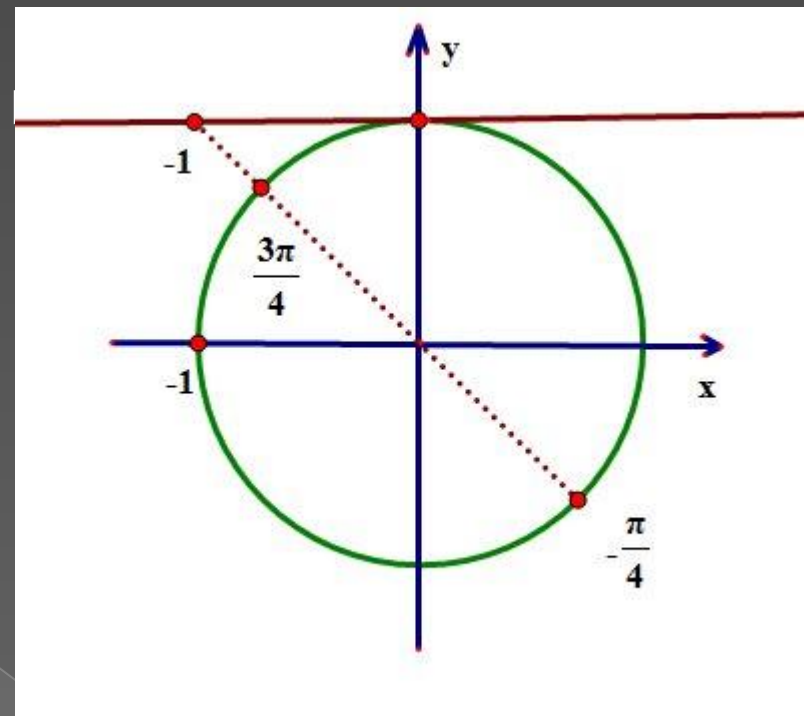
Линия котангенсов проходит через точку с координатами $(0, 1)$ единичной окружности параллельно оси Ox :



Отметим на линии котангенсов точку с абсциссой -1 :



Соединим эту точку с началом координат прямой продолжим ее до пересечения с окружностью. Эта прямая пересечет окружность в точках, соответствующих углам поворота на $\frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$ радиан:



Поскольку эти точки отстоят друг от друга на расстояние, равное π , то общее решение этого уравнения мы можем записать так:

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$$

$$\sin x = b: \quad x = (-1)^n \arcsin b + \pi n$$

$$\cos x = b: \quad x = \pm \arccos b + 2\pi n$$

$$\operatorname{tg} x = b: \quad x = \operatorname{arctg} b + \pi n$$

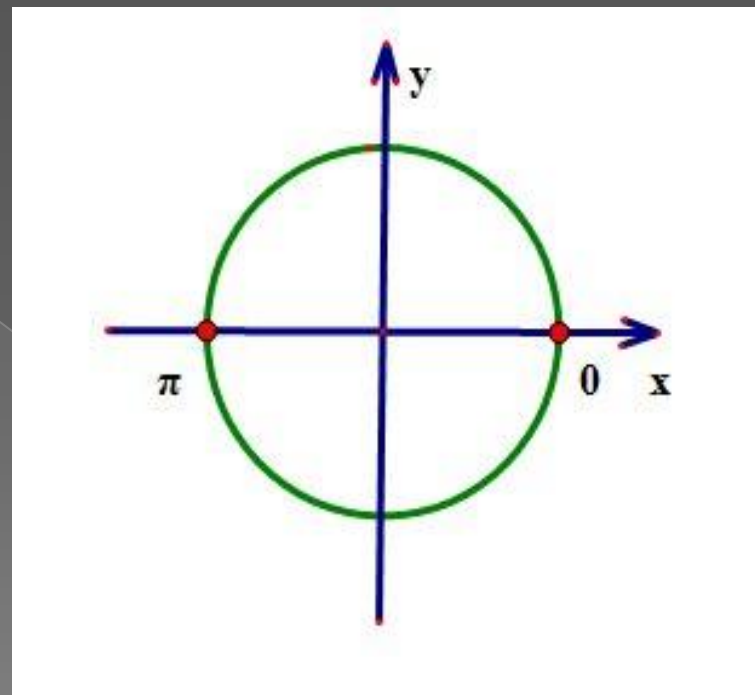
$$\operatorname{ctg} x = b: \quad x = \operatorname{arcctg} b + \pi n$$

ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ:

$$\sin x = 0$$

Отметим на окружности точки, ордината которых равна 0:

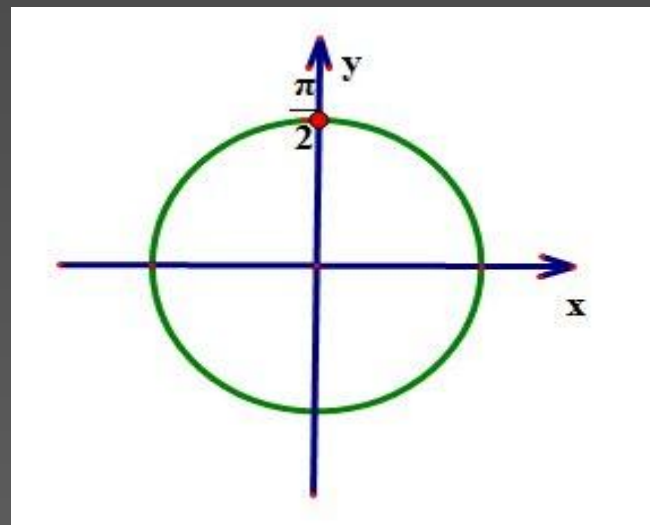
$$x = \pi n$$



$$\sin x = 1$$

Отметим на окружности единственную точку, ордината которой равна 1

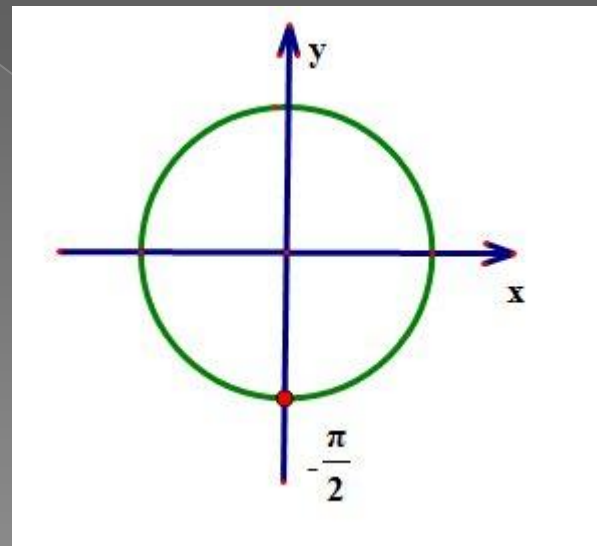
$$x = \pi/2 + 2\pi n$$



$$\sin x = -1$$

Отметим на окружности единственную точку, ордината которой равна -1:

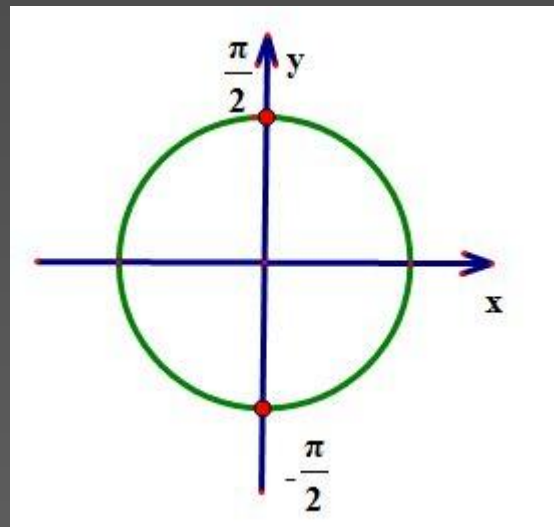
$$x = -\pi/2 + 2\pi n$$



$$\cos x = 0$$

Отметим на окружности точки, абсцисса которых равна 0:

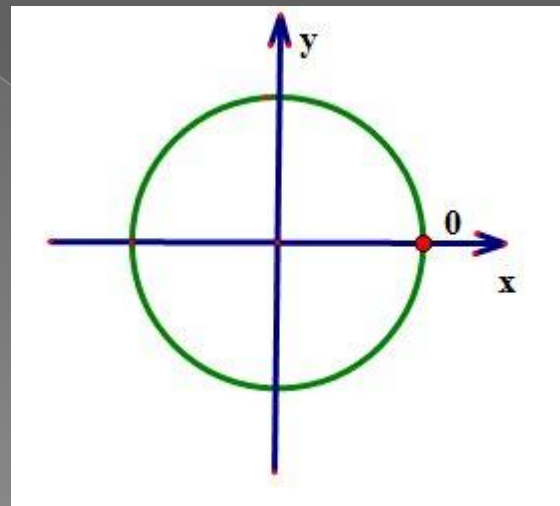
$$x = \pi/2 + \pi n$$



$$\cos x = 1$$

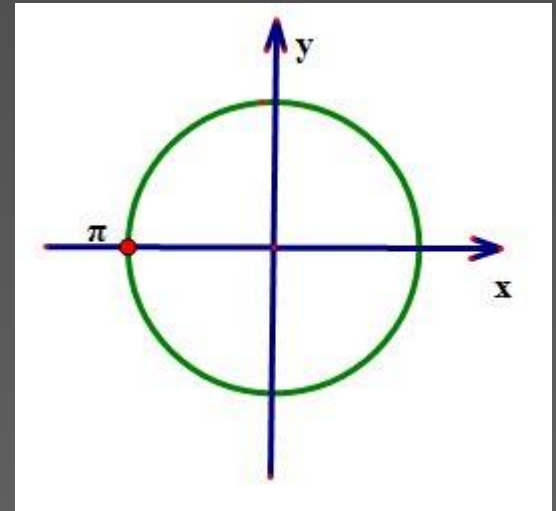
Отметим на окружности единственную точку, абсцисса которой равна 1

$$x = 2\pi n$$



$$\cos x = -1$$

Отметим на окружности единственную точку, абсцисса которой равна -1:



$$x = \pi + 2\pi n$$