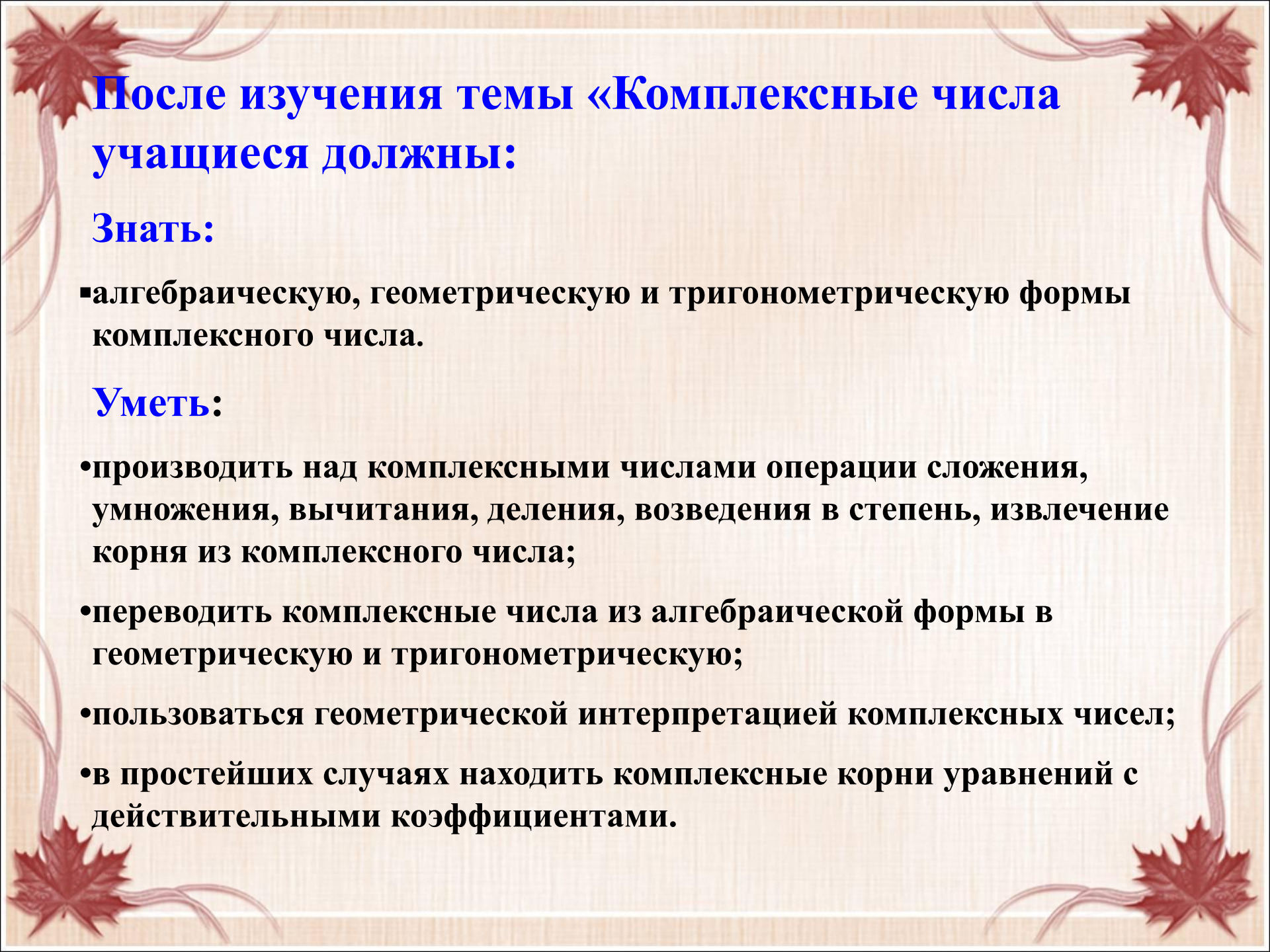




Комплексные числа



После изучения темы «Комплексные числа учащиеся должны:

Знать:

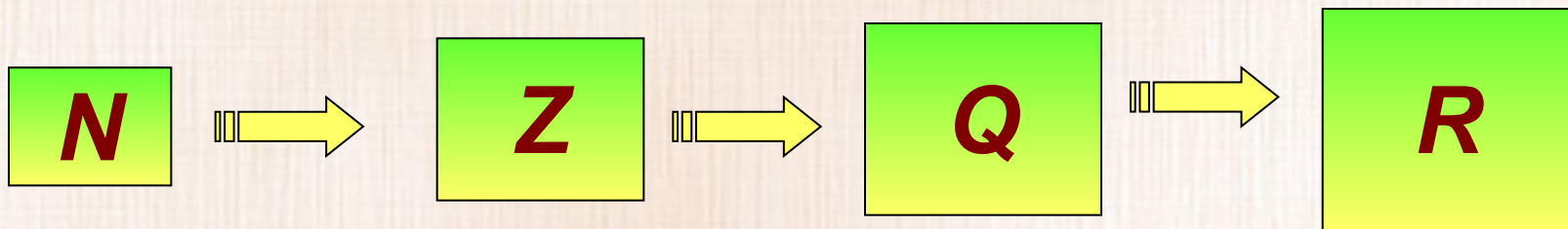
- алгебраическую, геометрическую и тригонометрическую формы комплексного числа.

Уметь:

- производить над комплексными числами операции сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в степень, извлечение корня из комплексного числа;
- переводить комплексные числа из алгебраической формы в геометрическую и тригонометрическую;
- пользоваться геометрической интерпретацией комплексных чисел;
- в простейших случаях находить комплексные корни уравнений с действительными коэффициентами.

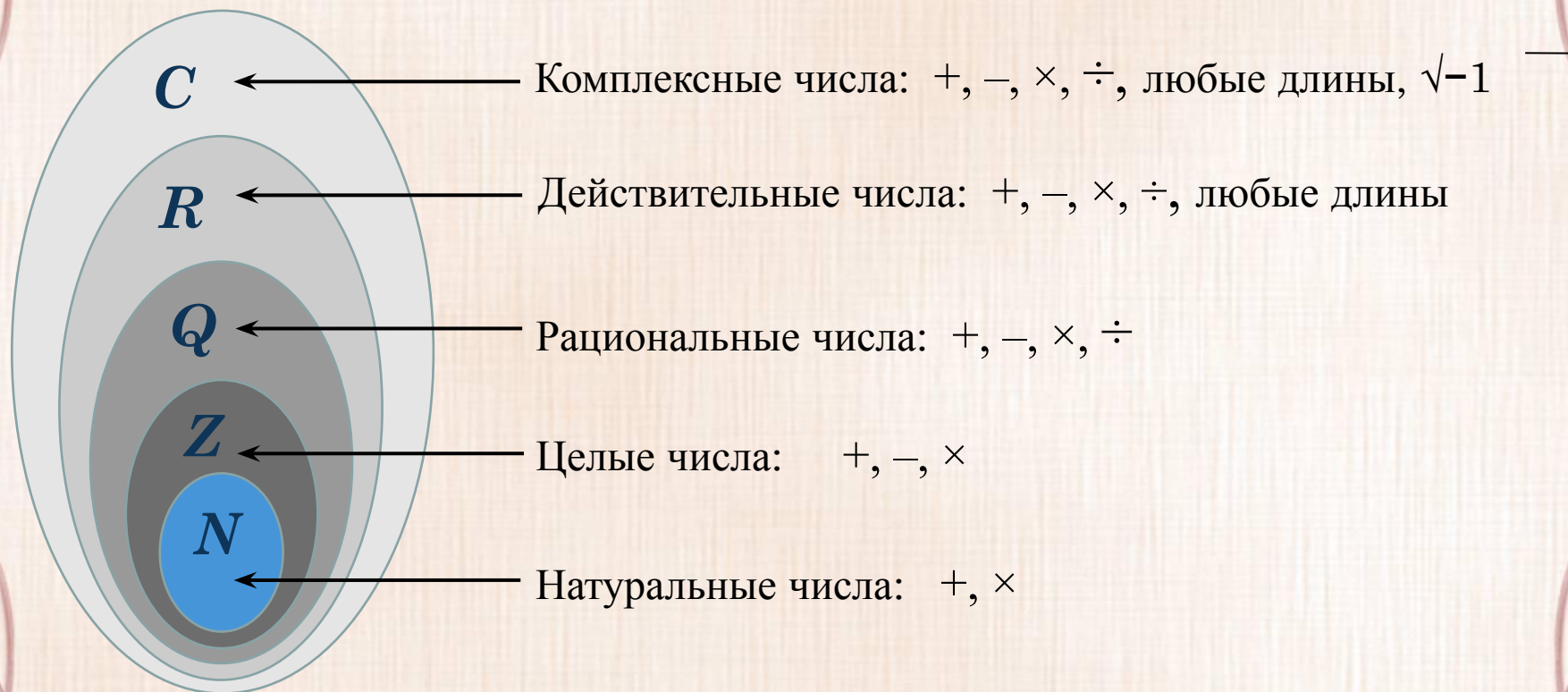
I. Подготовка к изучению нового материала

Какие числовые множества Вам знакомы?



$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Алгебраические операции



Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N	Сложение, умножение	Вычитание, деление, извлечение корней
Целые числа, Z	Сложение, вычитание, умножение	Деление, извлечение корней
Рациональные числа, Q	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, R	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из произвольных чисел
Комплексные числа, C	Все операции	

Минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа:

- 1) Существует квадратный корень из z , т.е. существует комплексное число, квадрат которого равен z .
- 2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.
- 3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий (сочетательному, переместительному, distributive).

Выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Мнимые числа

$$i = -1, i \text{ — мнимая единица}$$

$i, 2i, -0, 3i$ — чисто мнимые числа

Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием СЗ.

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i$$

$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$\begin{aligned} ai + bi &= (a + b)i; & ai - bi &= (a - b)i; \\ a(bi) &= (ab)i; & (ai)(bi) &= abi^2 = -a \end{aligned}$$

где a и b — действительные числа.

Комплексные числа

Определение 1. Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$$z = a + bi \in C \Leftrightarrow a \in R, b \in R,$$

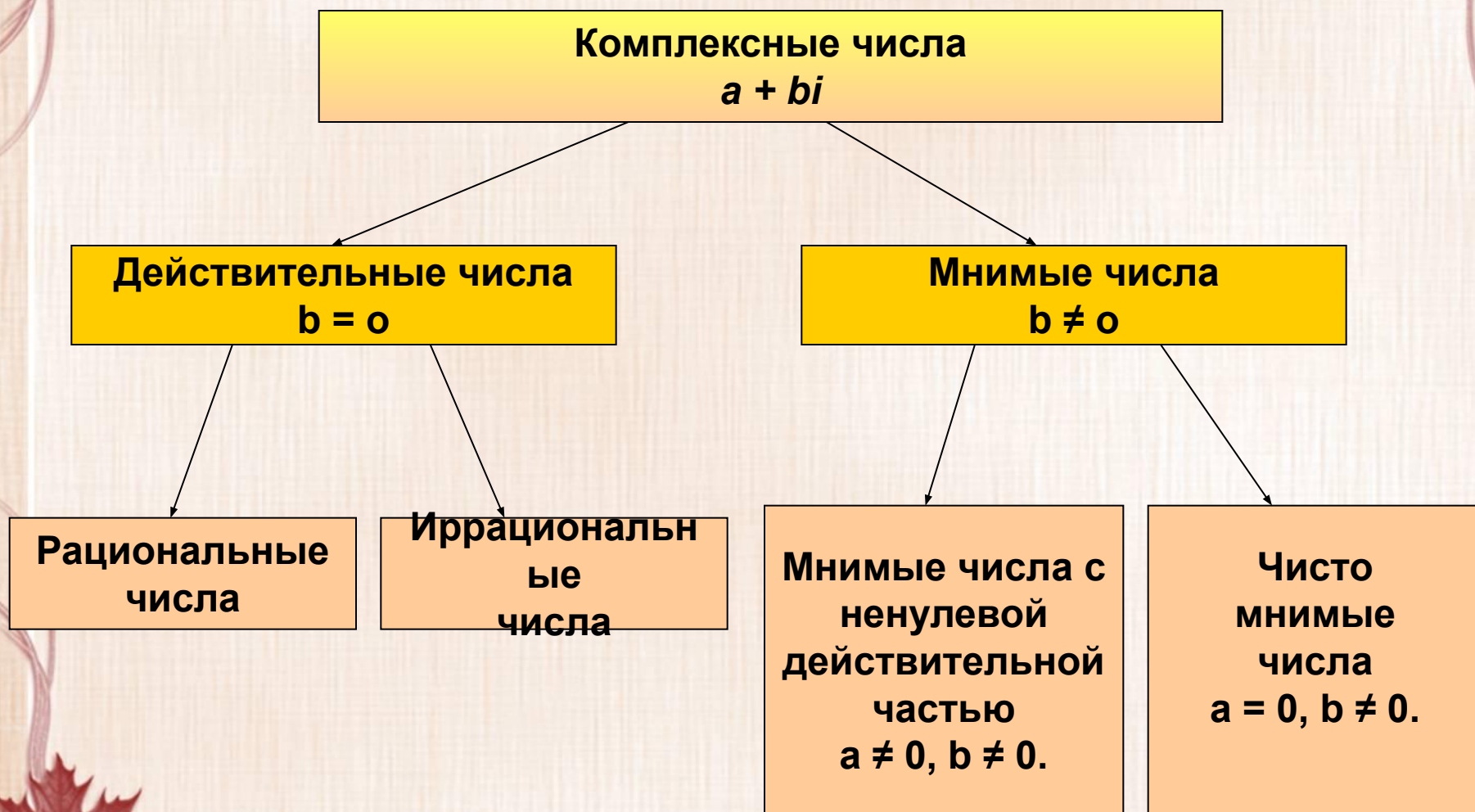
i – мнимая единица.

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

Определение 2. Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

Классификация комплексных чисел



Арифметические операции над КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Сопряженные комплексные числа

Определение: Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное** данному.

Если данное комплексное число обозначается буквой z , то сопряженное число обозначается $\bar{z}$:

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

Из всех комплексных чисел действительные числа (и только они) равны своим сопряженным числам.

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются взаимно сопряженными комплексными числами.

Свойства сопряженных чисел

1. Сумма и произведение двух сопряженных чисел есть число действительное.

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \quad z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

2. Число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

3. Число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

4. Число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Свойства сопряженных чисел

5. Число, сопряженное n -ой степени комплексного числа z , равно n -ой степени числа, сопряженного к числу z , т.е.

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

6. Число, сопряженное частному двух комплексных чисел, из которых делитель отличен от нуля, равно частному сопряженных чисел, т.е.

$$\overline{\left(\frac{a + bi}{c + di} \right)} = \frac{\overline{(a + bi)}}{\overline{(c + di)}}$$

Степени мнимой единицы

По определению первой степенью числа i является само число i , а второй степенью – число -1 :

$$i^1 = i, i^2 = -1$$

Более высокие степени числа i находятся следующим образом:

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

Очевидно, что при любом натуральном n

$$i^{4n} = 1;$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+1} = i;$$

$$i^{4n+3} = -i.$$

Примеры

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Например:

1. $(2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5) + (3 + 1)i = 7 + 4i;$

2. $(-2 + 3i) + (1 - 8i) = (-2 + 1) + (3 + (-8))i = -1 - 5i;$

3. $(-2 + 3i) + (1 - 3i) = (-2 + 1) + (3 + (-3))i = -1 + 0i = -1.$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Например:

$$(5 - 8i) - (2 + 3i) = (3 - 2) + (-8 - 3)i = 1 - 11i;$$

$$(3 - 2i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + ((-2) - (-2))i = 2 + 0i = 2.$$

Примеры

$$(a + bi)(c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i$$

Например:

$$1. (-1 + 3i)(2 + 5i) = -2 - 5i + 6i + 15i^2 = -2 - 5i + 6i - 15 = -17 + i;$$

$$2. (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13.$$

Произведение двух сопряженных чисел – действительное число:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Произведение двух чисто мнимых чисел – действительное число:

$$bi \cdot di = bdi^2 = -bd$$

Например:

$$1. 5i \cdot 3i = 15i^2 = -15;$$

$$2. -2i \cdot 3i = -6i^2 = 6.$$

Примеры

Деление комплексного числа $a + bi$ на комплексное число $c + di \neq 0$ определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Формула теряет смысл, если $c + di = 0$, так как тогда $c^2 + d^2 = 0$, т. е. деление на нуль и во множестве комплексных чисел исключается.

Обычно деление комплексных чисел выполняют путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Например:

$$1). \quad \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{1+2i+i^2}{2} = i$$

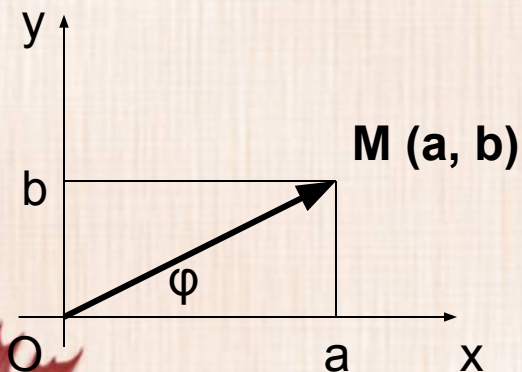
$$2). \quad \frac{3+2i}{2+i} = \frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8+i}{2^2-i^2} = \frac{8+i}{5} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$$

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Комплексному числу z на координатной плоскости соответствует точка $M(a, b)$.

Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы $\overrightarrow{OM}$

Определение: Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называют неотрицательное число $\sqrt{a^2 + b^2}$,
равное расстоянию от точки M до начала координат $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

φ – аргумент комплексного числа
 $\varphi \in (-\pi; \pi]$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

где φ – аргумент комплексного числа,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа,

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Теорема 1.

Если

$$z_1 \neq 0, z_2 \neq 0 \quad \text{и}$$
$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad \text{то:}$$

$$\text{а) } z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\text{б) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Теорема 2 (формула Муавра).

Пусть z — любое отличное от нуля
комплексное число, n — любое целое число.

Тогда

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Извлечение корня из комплексного числа.

- *Теорема.* Для любого натурального числа n и отличного от нуля комплексного числа z существуют n различных значений корня n -степени.

Если

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

то эти значения выражаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, \dots, (n-1)$