Тема: «Способы решения тригонометрических уравнений»

Алгебра 10 класс

Знать:

1. Свойства тригонометрических функций.
2. Определения обратных тригонометрических функций.
3. Формулы тригонометрии.
4. Формулы решения простейших тригонометрических уравнений.

Уметь:

1. Вычислять значения тригонометрических функций.
2. Вычислять значения обратных тригонометрических функций.
3. Решать простейшие тригонометрические уравнения.
4. Выполнять тождественные преобразования выражений.

Решение простейших тригонометрических уравнений

Тригонометрические уравнения	a = любо[illegible]	a = -1	a = 0	a = 1
sin x = a, **a** $\in$ $[-1;1]$	$x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,$ $n\in Z$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$	$x=\pi n, n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$
cos x = a, **a** $\in$ $[-1;1]$	$x=\pm\arccos a+2\pi n,$ $n\in Z$	$x=\pi+2\pi n, n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$	$x=2\pi n, n\in Z$
tg x = a, **a** $\in$ **R**	$x=arctga+\pi n, n\in Z$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$	$x=\pi n, n\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$
ctg x = a, **a** $\in$ **R**	$x=arcctga+\pi n, n\in Z$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

$$2\sin 2x = 1$$

$$tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$$

$$ctg\left(3x + \frac{\pi}{10}\right) - 1 = 0$$

1) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

2) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$

3) $tgx + 3ctgx = 4$

4) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$

5) $2\sin 2x + \sin x = 0$

6) $2\sin 3x - 5\cos 3x = 0$

7) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$

8) $2\sin^2 x - 2\sin^2 x + 2\sin^2 3x = 1$

9) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

10) $3\cos x + 4\sin x = 5$

Методы решения тригонометрических уравнений

- Разложение на множители
- Сведение к алгебраическому уравнению
- Введение вспомогательного угла
- Универсальная подстановка
- Сведение к однородному уравнению
- Использование формул преобразования суммы в произведение и обратно
- Применение формул понижения степени
- Обращение к условию равенства одноименных тригонометрических функций
- Использование свойства ограниченности функций (метод оценки)

Знать:

1. Способы решения тригонометрических уравнений:
   - сведения к квадратному уравнению
   - разложения на множители
   - понижения степени.
   - однородные уравнения
   - введения вспомогательного угла.

Уметь:

1. Классифицировать тригонометрические уравнения по способу решения.
2. Решать тригонометрические уравнения следующими способами:
   - способом сведения к квадратному уравнению
   - способом разложения на множители
   - способом понижения степени.
   - однородные уравнения.
   - способом введения вспомогательного угла.

«Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть – и впоследствии подтвердить это, - что, следуя этому методу, мы достигнем цели.»

Лейбниц

Сведения к квадратному уравнению

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Пусть a = sin x

$$2a^2 + a - 1 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = -1$$

$$1)\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$2)\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Сведения к квадратному уравнению

$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0$$

$$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$$

$$-2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Пусть a = sin x

$$2a^2 - 5a + 2 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = 2$$

$$1)\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$2)\sin x = -2$$

уравнение решения не имеет, так как

$$|\sin x| \le 1$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Сведения к квадратному уравнению

$$tgx + 3ctgx = 4$$

$$tgx * ctgx = 1, tgx = \frac{1}{ctgx}$$

$$\frac{1}{ctgx} + 3ctgx = 4 \Big| * ctgx$$

$$1 + 3ctg^2 x = 4ctgx$$

$$3ctg^2 x - 4ctgx + 1 = 0$$

Пусть a = ctg x

$$3a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{3}; a_2 = 1$$

Выполним обратную замену

$$1) ctgx = \frac{1}{3}$$

$$x = arcctg\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$2) ctgx = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = arcctg\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z;\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Алгоритм
решения тригонометрических уравнений.

1. Привести уравнение к квадратному, относительно тригонометрических функций, применяя тригонометрические тождества.
2. Ввести новую переменную.
3. Записать данное уравнение, используя эту переменную.
4. Найти корни полученного квадратного уравнения.
5. Перейти от новой переменной к первоначальной.
6. Решить простейшие тригонометрические уравнения.
7. Записать ответ.

Разложения на множители

$$2\sin 2x + \sin x = 0$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$4\sin x\cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x(4\cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z$$

$$4\cos x + 1 = 0$$

$$4\cos x = -1$$

$$\cos x = -\frac{1}{4}$$

$$x = \pm\arccos(-\frac{1}{4}) + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{4}) + 2\pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z$, $x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{4}) + 2\pi k, k \in Z.$

$$\sin^2 x = 3\sin x\cos x$$

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x = 0$$

$$\sin x(\sin x - 3\cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \qquad \textit{или} \qquad \sin x - 3\cos x = 0$$

$$x = \pi k, \quad k \in z$$

Однородные уравнения

Первой степени:

$$\mathbf{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0}$$

Т.к. sinx и cosx одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на cosx (или на sinx). Получим: простое уравнение $a \cdot \mathrm{tg}x + b = 0$ или $\mathrm{tg}x = m$.

Второй степени:

$$\mathbf{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0}$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \mathrm{tg}^2 x + b \cdot \mathrm{tg}x + c = 0.$$

$$\sin^2 x = 3\sin x\cos x$$

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x = 0$$

$$\sin x(\sin x - 3\cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x - 3\cos x = 0 \qquad (\div \cos x \neq 0)$$

$x = \pi k, \quad k \in z$

$$tgx - 3 = 0$$

$$tgx = 3$$

$$x = arctg3 + \pi n, \quad n \in z$$

$Ответ: x = \pi k,\ k \in z;\ x = arctg3 + \pi n,\ n \in z$

Однородные уравнения

$$6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 = 1$$

$$6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0 \,\Big|\, \cos^2 x$$

$$\frac{5\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x * \cos x}{\cos^2 x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$2tg^2 x - 3tgx - 2 = 0$$

Однородные уравнения

$$5tg^2x - 3tgx - 2 = 0$$

Пусть a = tg x

$$5a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$a_1 = -0{,}4; a_2 = 1$$

$$1)\,tgx = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$2)\,tgx = -0{,}4$$

$$x = arctg(-0{,}4) + \pi n, n \in Z$$

$$x = -arctg\,0{,}4 + \pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, x = -arctg\,0{,}4 + \pi n, n \in Z$

Метод понижения степени

$$2\sin^2 x - 2\sin^2 2x + 2\sin^2 3x = 1$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}; \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

$$2 * \frac{1-\cos 2x}{2} - 2 * \frac{1-\cos 4x}{2} + 2 * \frac{1-\cos 6x}{2} = 1$$

$$1-\cos 2x - (1-\cos 4x) + 1 - \cos 6x = 1$$

$$1-\cos 2x - 1 + \cos 4x + 1 - \cos 6x = 1$$

$$\cos 4x - \cos 2x - \cos 6x = 0$$

$$\cos 4x - (\cos 2x + \cos 6x) = 0$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Метод понижения степени

$$\cos 4x - 2\cos 4x \cos 2x = 0$$

$$\cos 4x(1 - 2\cos 2x) = 0$$

$$\cos 4x = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in Z$$

$$1 - 2\cos 2x = 0$$

$$2\cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z, \qquad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in Z$

Метод понижения степени

$$2\sin^2 x + \cos 4x = 0$$

$$2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)+\cos 2\cdot 2x = 0$$

$$1-\cos 2x+\cos^2 2x-\sin^2 2x = 0$$

$$\cos^2 2x-\cos 2x+\cos^2 2x = 0$$

$$2\cos^2 2x-\cos 2x = 0$$

$$\cos 2x\left(2\cos 2x-1\right) = 0$$

1) $\cos 2x = 0$ *или* 2) $2\cos 2x - 1 = 0$

1) $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\quad k \in Z.$

2) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\quad n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\quad k \in Z;\qquad x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\quad n \in Z;\qquad x = -\frac{\pi}{6} + \pi m,\quad m \in Z$

Метод введения вспомогательного угла

$$a\cos x + b\sin x = c$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = A \quad >0$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b}};$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x = 1,$$

$$\sin(\varphi + x) = 1$$

$$\varphi + x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \varphi + \pi n, n \in Z$$

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Метод введения вспомогательного угла

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \,|: 2$$

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

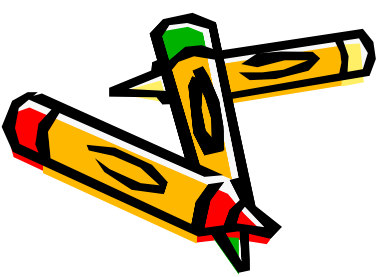
$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$\textit{Ответ}: x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$



Правила.

- Увидел квадрат – понижай степень.
- Увидел произведение – делай сумму.
- Увидел сумму – делай произведение.

Проблемы, возникающие при решении тригонометрических уравнений.

1.Потеря корней:

- делим на g(x).
- опасные формулы (универсальная подстановка).

Этими операциями мы сужаем область определения.

2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на g(x) (избавляемся от знаменателя).

Этими операциями мы расширяем область определения.

Можно ли насладиться решением уравнения

$$\sin x + \cos x = 1?$$

Да, если стать его исследователем!

1 способ: Введение вспомогательного аргумента

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \times \sin(x + \varphi) = 1$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2} \times \sin(x + \varphi) = 1$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x + \varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in z \qquad x = 2\pi n, n \in z$$

$$x + \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in z \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in z$$

$$Ответ: \{2\pi n, n \in z\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in z\right\}$$

2 способ: Применение универсальной подстановки

$$\sin x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}$$

$$tg\,\frac{x}{2} = y$$

$$\frac{2y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2} = 1$$

$$\frac{2y+1-y^2}{1+y^2} = 1$$

$$2y+1-y^2 = 1+y^2$$

$$2y-2y^2 = 0$$

$$y(y-1) = 0$$

$y = 0$ *или* $y = 1$

$$tg\,\frac{x}{2} = 0 \qquad 1-tg\,\frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \pi n, n \in z \qquad tg\,\frac{x}{2} = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in z \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in z$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in z$$

Проверка. $x = \pi + 2\pi m, m \in Z$

Ответ: $\{2\pi n, n \in z\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in z\right\}$

«Мне приходится делить время между политикой и уравнениями. Однако уравнения, по-моему, гораздо важнее.

Политика существует только для данного момента, а уравнения будут существовать вечно.»

А. Эйнштейн