

ТАЙНОЕ СТАНОВИТСЯ ЯВНЫМ

Авторы проекта:
Борзова Дарья ,
Соглаева Надежда,
8 г класс ,
МОУ лицей №66.

*Руководитель:
Гетманцева Лариса Николаевна*

Проблемный вопрос

- Какие способы решения квадратных уравнений наиболее рациональные?

Цели исследования

- Рассмотреть способы решений квадратных уравнений.
- Найти наиболее рациональные способы решений.

Ход исследования

- Сформулировать основные понятия.
- Рассмотреть способы решений квадратных уравнений.
- Сравнить способы решений.
- Выбрать наиболее рациональный способ решения.
- Сделать выводы.

Гипотеза

- Все способы решений квадратных уравнений равноценны.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Определение 1. Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где коэффициенты a, b, c – любые действительные числа, причём $a \neq 0$.
- Коэффициенты a, b, c различают по названиям: a – первый или старший, коэффициент; b – второй коэффициент, или коэффициент при x ; c – свободный член.

Основные понятия

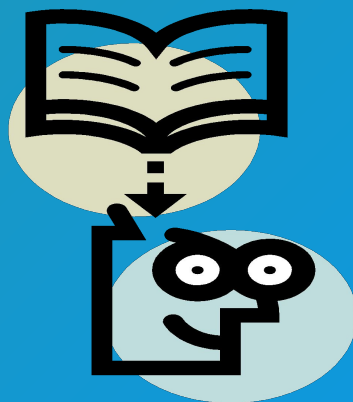
- Определение 2. Полное квадратное уравнение – это уравнение, у которого коэффициенты b, c отличны от нуля.
Неполное квадратное уравнение – это уравнение, у которого хотя бы один из коэффициентов b, c равен нулю.

Основные понятия

- Определение 3. Квадратное уравнение называют приведённым, если его старший коэффициент равен 1; квадратное уравнение называют неприведённым, если старший коэффициент отличен от 1.

Виды неполных квадратных уравнений

- 1) $b=0, c=0$, то $ax^2=0$;
- 2) $c=0, b \neq 0$, то $ax^2+bx=0$;
- 3) $b=0, c \neq 0$, то $ax^2+c=0$.



Решение неполных квадратных уравнений вида $ax^2=0$

$$ax^2=0,$$

$$x^2=0,$$

$$x=0.$$

Пример:

$$8x^2=0,$$

$$x^2=0,$$

$$x=0.$$

Ответ: 0.



Решение неполных квадратных уравнений вида $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0,$$

$$x(ax + b) = 0,$$

$$x = 0 \text{ или } ax + b = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -b/a.$$

ПРИМЕР:

$$3x^2 + 9x = 0,$$

$$3x(x + 3) = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3.$$

Ответ: -3; 0.

Решение неполных квадратных уравнений вида $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c,$$

$$x^2 = -c/a.$$

Если $(-c/a) > 0$, то уравнение имеет 2 корня.

Если $(-c/a) < 0$, то уравнение не имеет корней.

ПРИМЕР 1: $4x^2 - 16 = 0,$

$$4x^2 = 16,$$

$$x^2 = 4,$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2.$$

Ответ: -2; 2.

ПРИМЕР 2: $3x^2 + 10 = 0,$

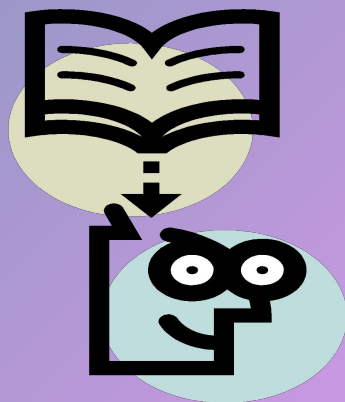
$$3x^2 = -10.$$

Уравнение не имеет
действительных
корней.

Для эрудитов

Если вам скажут :

«Квадратное уравнение , дискриминант которого меньше нуля , не имеет решение» , можете блеснуть эрудицией , уточнив : « Не имеет решение в действительных числах , в комплексных же имеет целых два корня».



Решение приведённого квадратного уравнения разложением его на множители

Решить уравнение: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

РЕШЕНИЕ: Разложим на множители квадратный трёхчлен $x^2 - 4x + 3$, используя способ группировки.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= x^2 - x - 3x + 3 = (x^2 - x) - (3x - 3) = \\ &= x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3). \end{aligned}$$

Значит, уравнение можно переписать в виде

$$(x - 1)(x - 3) = 0,$$

$$x - 1 = 0 \text{ или } x - 3 = 0,$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Ответ: 1;3.

Решение квадратного уравнения выделением квадрата двучлена

■ ПРИМЕР 1:

$$\begin{aligned}x^2 + 10x + 25 &= 0, \\(x + 5)^2 &= 0, \\x + 5 &= 0, \\x &= -5.\end{aligned}$$

Ответ: -5.

■ ПРИМЕР 2:

$$\begin{aligned}x^2 + 8x - 1 &= 0, \\x^2 + 2x \cdot 4 - 1 &= 0, \\x^2 + 2x \cdot 4 + 16 &= 16 + 1, \\(x + 4)^2 &= 17, \\x + 4 &= -\sqrt{17} \text{ или } x + 4 = \sqrt{17}, \\x_1 &= -4 - \sqrt{17}, x_2 = -4 + \sqrt{17}.\end{aligned}$$

Графический способ решений квадратных уравнений

Решите уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

1) $a=1$, $b=-2$, $x_0 = -b/2a = 1$,

$y_0 = 1 - 2 - 3 = -4$.

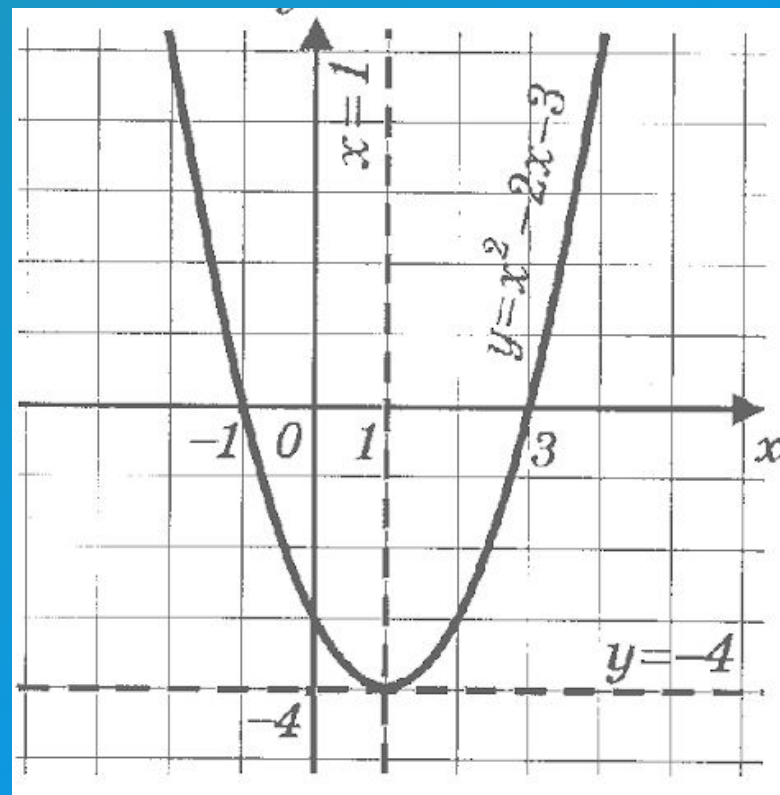
Значит, вершиной параболы служит точка $(1; -4)$, а осью параболы служит прямая $x=1$.

2) Возьмем точки, симметричные относительно оси параболы.

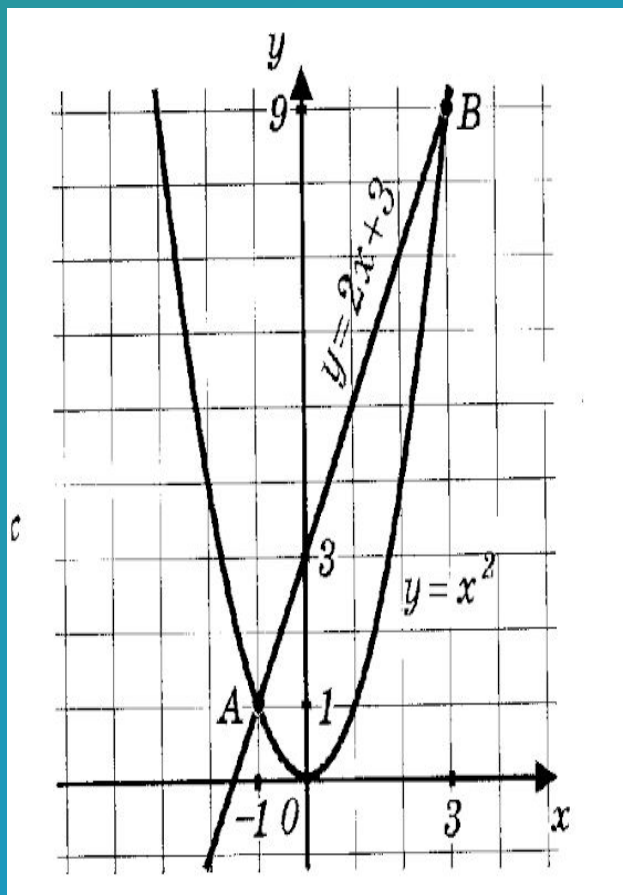
x	-1	0	2	3
y	0	-3	-3	0

3) Через точки проводим параболу
Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения параболы с осью x .

4) Ответ : $-1; 3$.



Графический способ решений квадратных уравнений



Решить уравнение
 $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Преобразуем уравнение к виду
 $x^2 = 2x + 3$.

Построим в одной системе
координат графики функций
 $y = x^2$ и $y = 2x + 3$.

Они пересекаются в двух
точках $A(-1; 1)$ и $B(3; 9)$.
Корнями уравнения служат
абсциссы точек A и B .

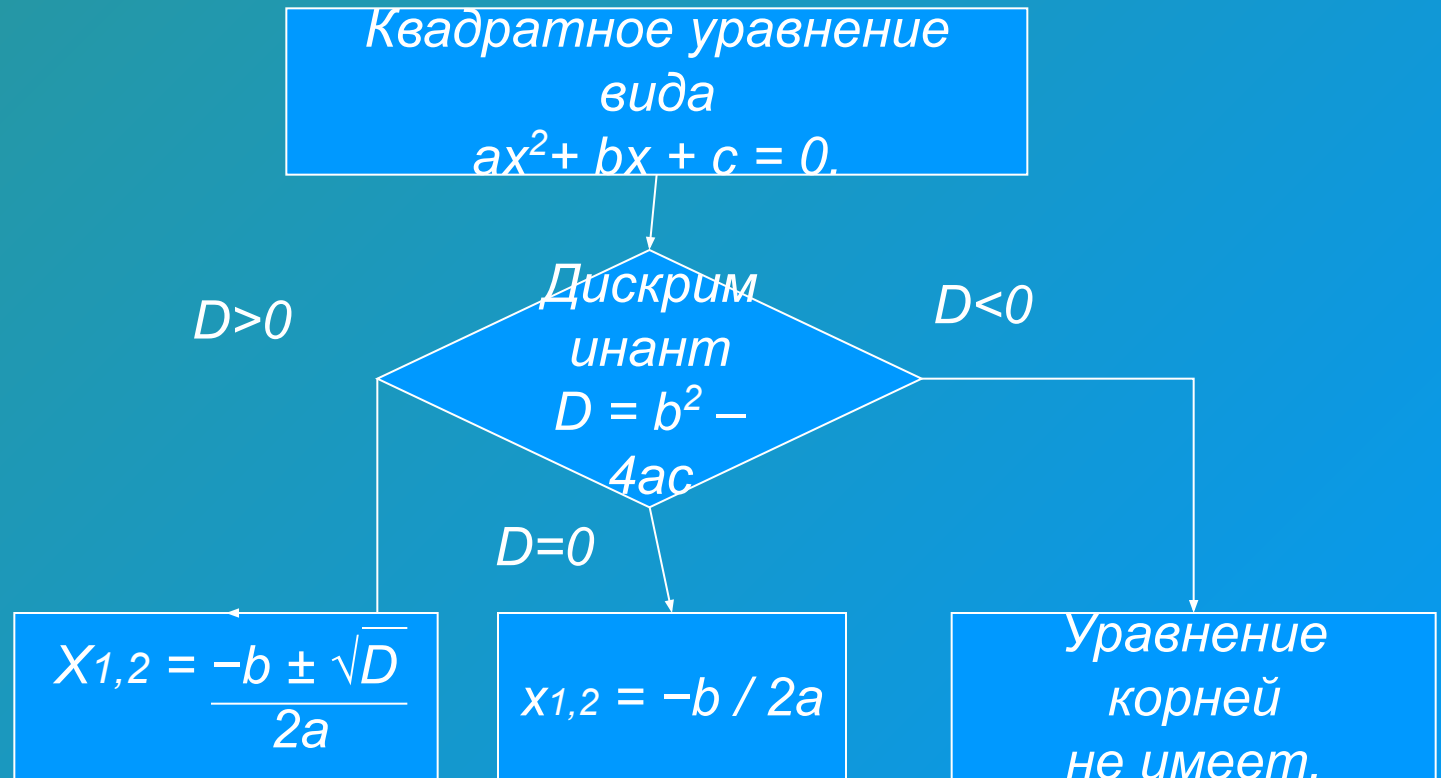
Ответ : $-1; 3$.

Замечание



- Несмотря на обилие способов графического решения квадратных уравнений, они не дают стопроцентной гарантии решения любого квадратного уравнения.

Алгоритм решения полного квадратного уравнения



Примеры решений полных квадратных уравнений

ПРИМЕР 1. $x^2 + 3x - 5 = 0$.

РЕШЕНИЕ: $a = 1$, $b = 3$, $c = -5$.

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 29.$$

Так как $D > 0$, то данное квадратное уравнение имеет два корня. Эти корни находятся по формулам

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}$$

Примеры решения полных квадратных уравнений

ПРИМЕР 2. Решить уравнение $-9x^2 + 6x - 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Умножим обе части уравнения на -1 , получим $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Здесь $a = 9$, $b = -6$, $c = 1$.

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0.$$

Так как $D = 0$, то данное уравнение имеет два одинаковых корня.

Корни находятся по формуле $x_1 = x_2 = -b / 2a = 1/3$.

Примеры решения полных квадратных уравнений

ПРИМЕР 3.

Решить уравнение $2x^2 - x + 3,5 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Здесь $a=2$, $b=-1$, $c=3,5$.

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 28 = -27.$$

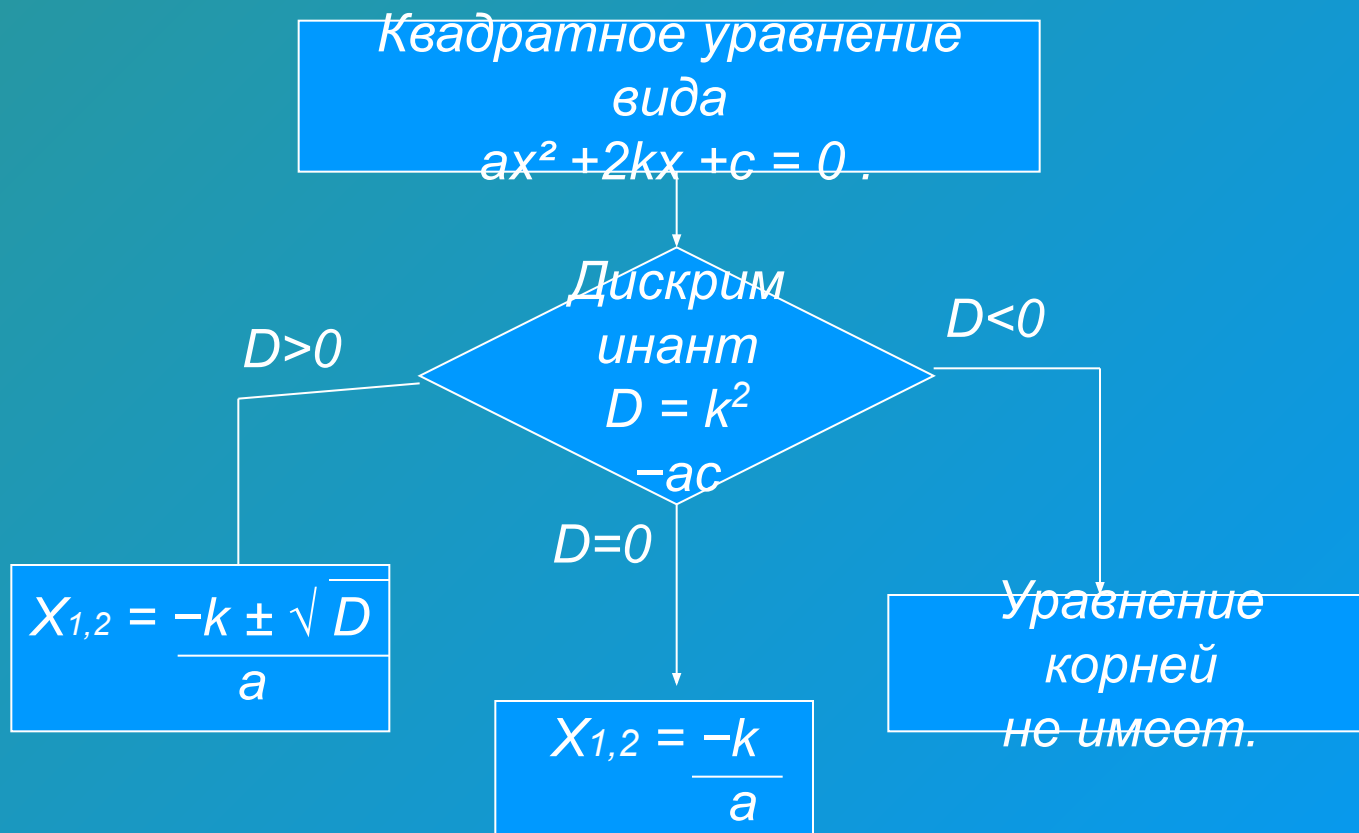
Так как $D < 0$, то данное квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Полезно запомнить



- Слово дискриминант происходит от латинского *discriminans* - «различающий». Дискриминант «различает» квадратные уравнения по числу корней.

Ещё одна формула корней квадратного уравнения



Решим квадратные уравнения следующими способами :

- а) разложением на множители ;
- б) графическим ;
- в) с использованием формул.

Решая уравнения, засекали время решения (в минутах) для каждого способа решения .

1 . $2x^2 - 9x = 0$;

2 . $x^2 - 64 = 0$;

3 . $x^2 - 14x + 49 = 0$;

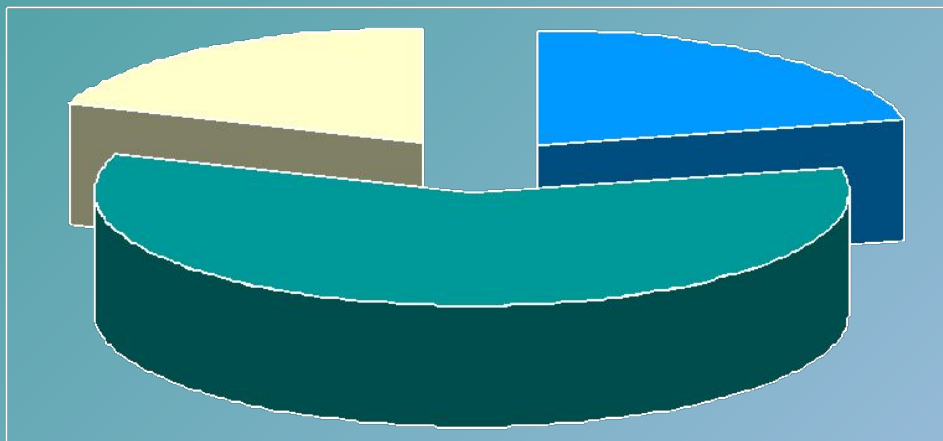
4 . $x^2 + 6x + 8 = 0$;

5 . $4x^2 - 7x - 7,5 = 0$;

6 . $2x^2 - 10x + 1 = 0$;

7 . $2x^2 = 3x + 2$.

Результаты решения уравнений



- Среднее время решения уравнения способом разложения на множители.
- Среднее время решения уравнения графическим способом.
- Среднее время решения уравнения с помощью формул.

ВЫВОДЫ

Из диаграмм видно , что на решение уравнений графическим способом затрачено времени больше, чем на два других способа решения и не к любому квадратному уравнению его можно применить.

На решение уравнений способом разложения на множители и по формулам затрачено в среднем равное количество времени. Эти способы равноценны. Алгоритм решения квадратного уравнения по формулам дискриминанта является универсальным. Он применим к любому квадратному уравнению. К неполным и приведённым квадратным уравнениям применим способ разложения на множители.

Информационные ресурсы

- Мордкович А. Г. Алгебра. 8 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. – 3-е издание, доработанное – М.: Мнемозина, 2001. – 223с.
- Мордкович А. Г. и др. Алгебра 8 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений. – 2-е издание. – М.: Мнемозина, 2001. – 247с.