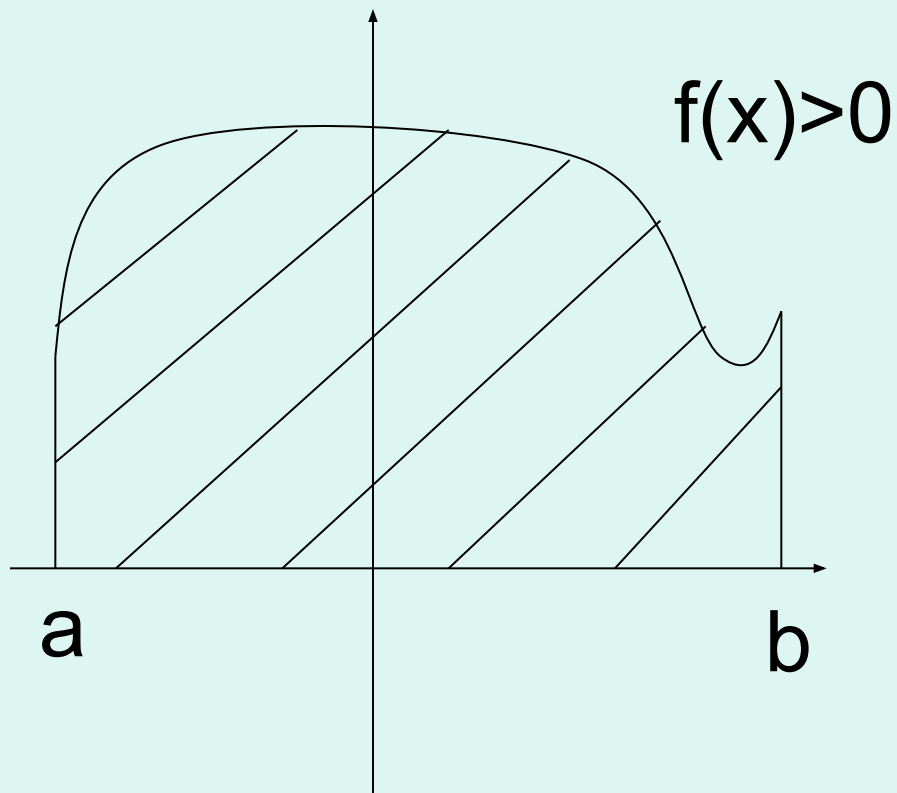


Применение определённого интеграла в геометрических задачах.

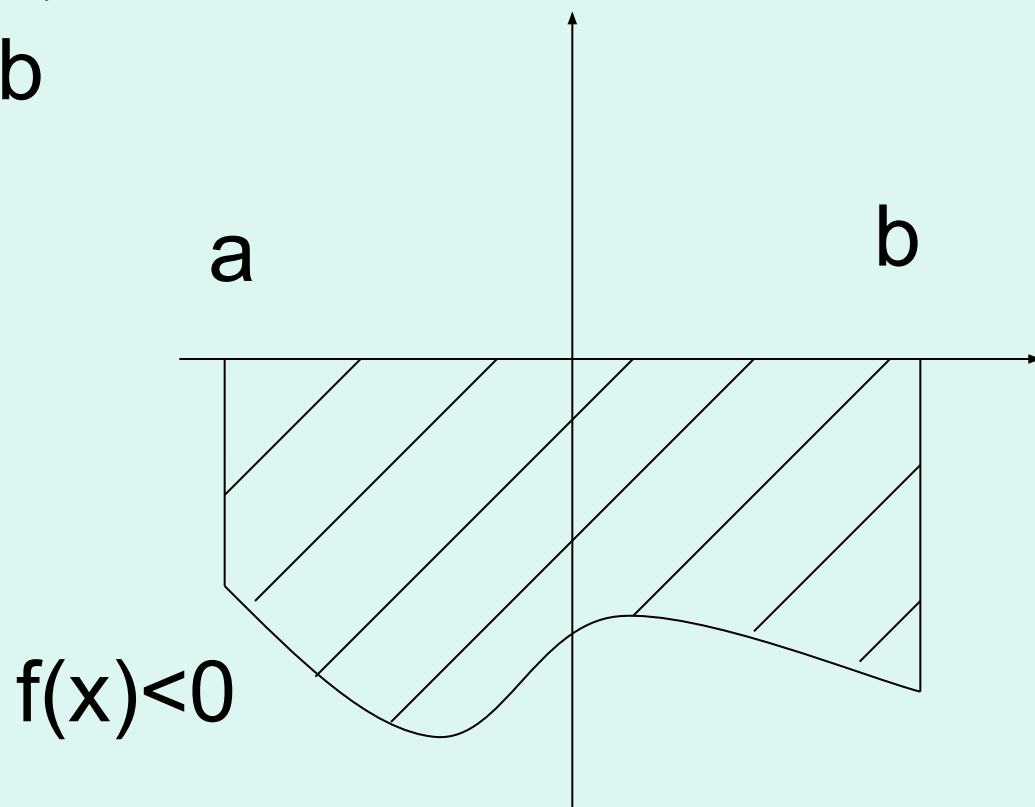
Вычисление площадей плоских фигур

*Фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и осью ox , называется **криволинейной трапецией** (с основанием на оси ox).*

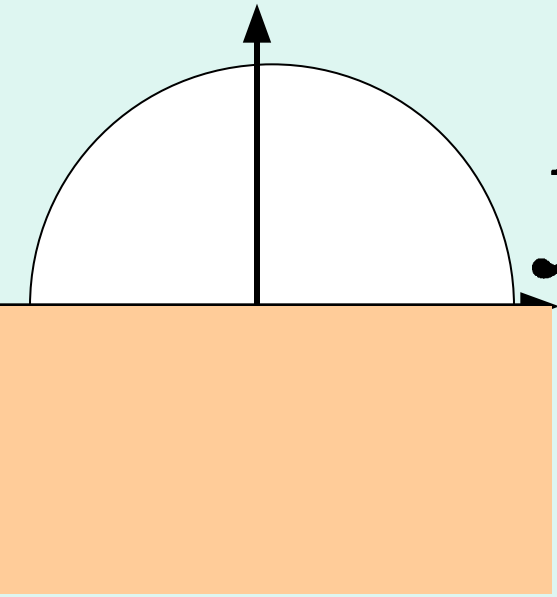


$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$$S = - \int_a^b f(x) dx$$



Площадь круга



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$S = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$S = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$x = R \sin \alpha; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$dx = R \cos \alpha d\alpha,$$

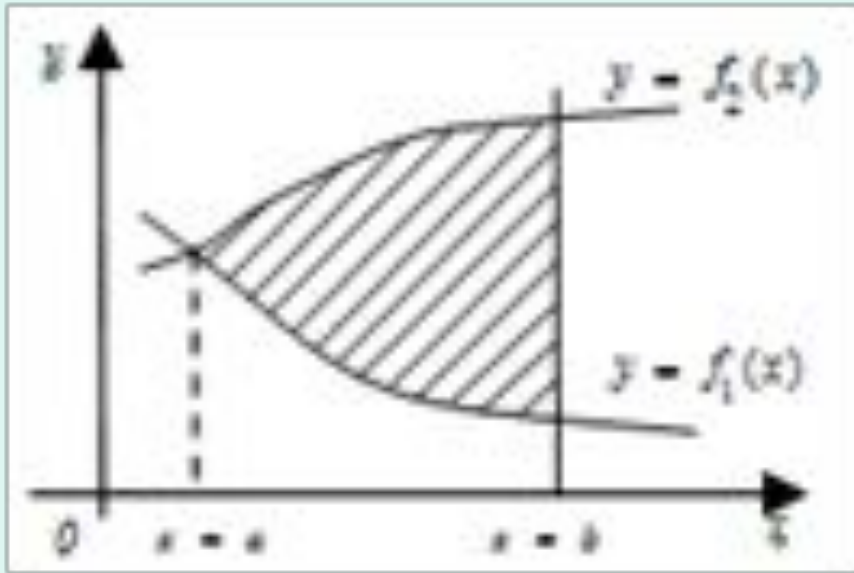
$$\cos \alpha \geq 0$$

$$S = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \alpha} R \cos \alpha d\alpha$$

$$S = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha$$

$$S = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} d\alpha$$

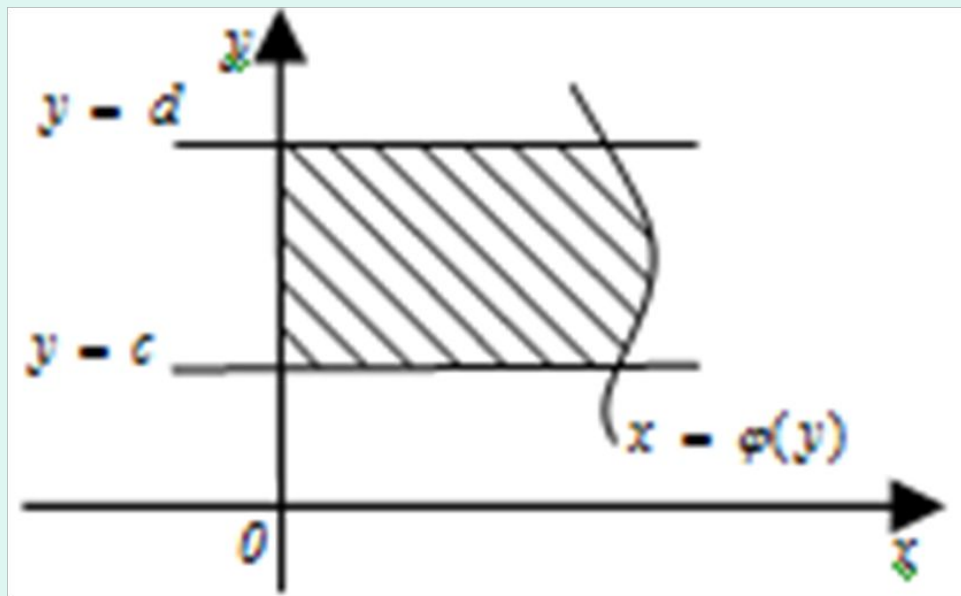
$$S = \pi R^2$$



$$f_2(x) \geq f_1(x)$$

$$x \in [a; b]$$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

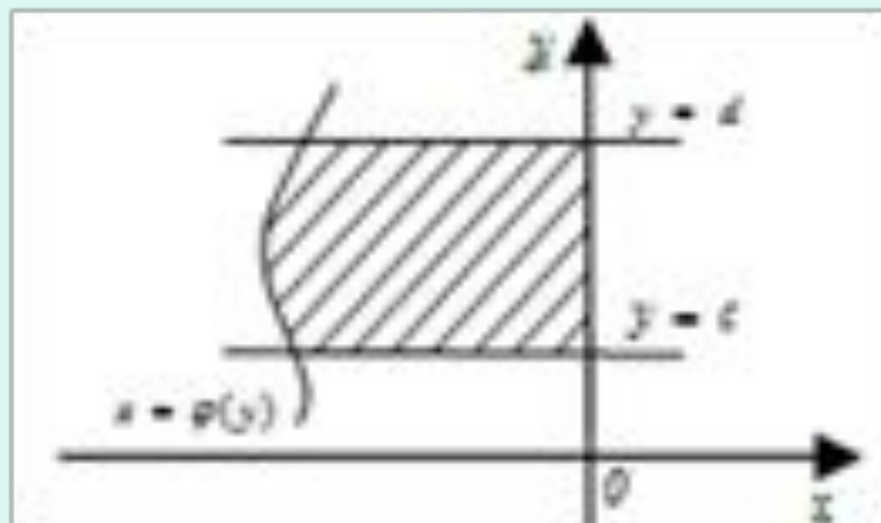


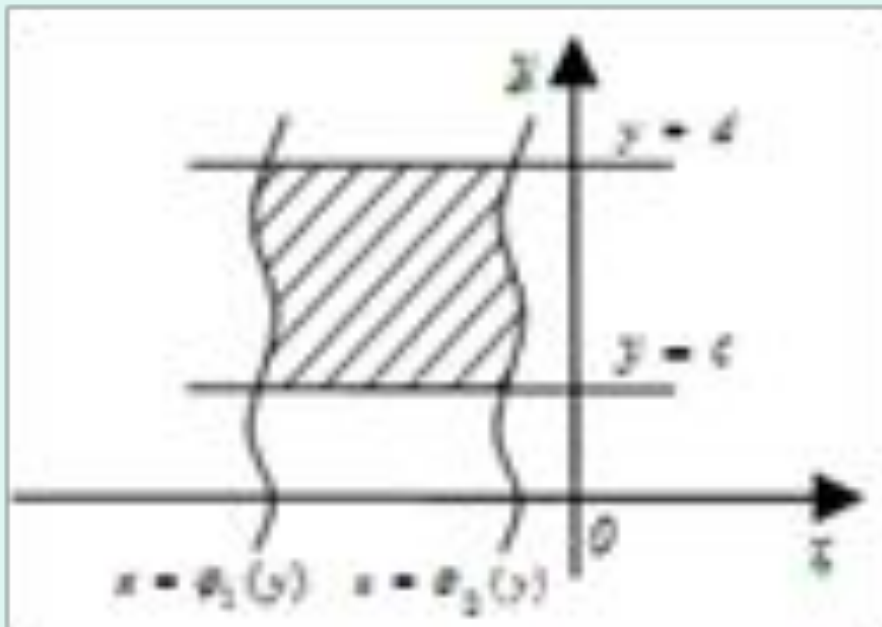
$$S = \int_c^d \varphi(y) dy$$

$$\varphi(y) \geq 0$$

$$S = -\int_c^d \varphi(y) dy$$

$$\varphi(y) < 0$$





$$x = \varphi_1(y)$$

$$x = \varphi_2(y)$$

$$\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$$

$$y = d \quad y = c$$

$$c < d$$

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy$$

Вычисление объёмов тел вращения

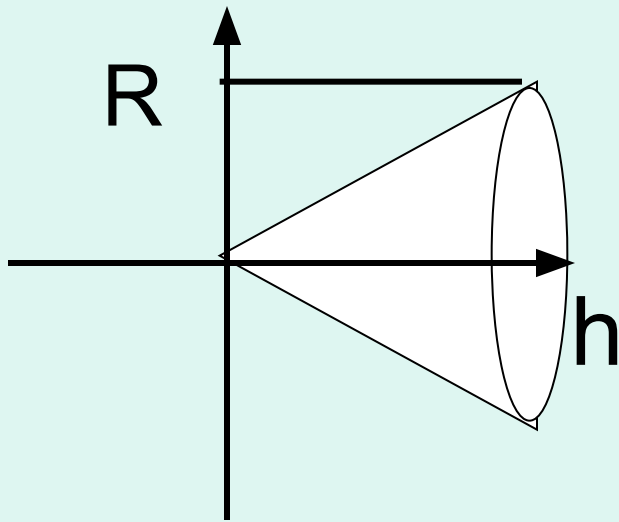
Объём тела, образованного *вращением* *вокруг оси ox* криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a, x = b$, вычисляется по формуле :

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Объём тела, образованного **вращением вокруг оси ou** криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $\varphi(y)$, отрезком оси ординат и прямыми $c \leq y \leq d$, вычисляется по формуле :

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$$

№ 1. Используя формулу объёма тела вращения, получите формулу для вычисления **объёма конуса**.



$$y = \frac{R}{h} x$$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h} x \right)^2 dx = \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

№ 2

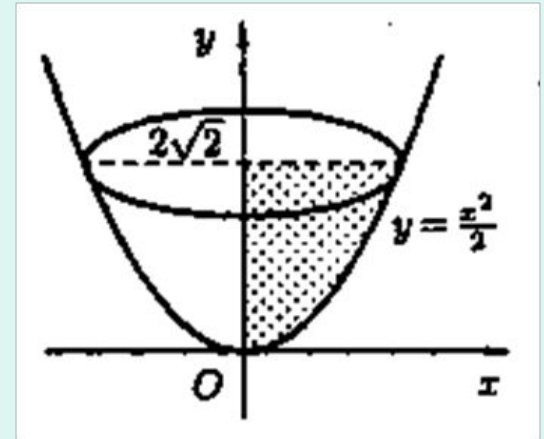
Вычислите объём тела, полученного вращением кривой – графика функции $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, вокруг оси Ox .

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$$

№ 3 Найти объем тела,
образованного
вращением фигуры, ограниченной
линиями

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad x=0, \quad y = 2\sqrt{2}$$

вокруг оси Oy



$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$$

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{2y} \right)^2 dy = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi$$

Применение определённого интеграла в физике.

Работа силы F

Пусть материальная точка перемещается вдоль оси OX под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно оси. Тогда работа, произведённая силой F при перемещении точки из положения $x = a$ в положение $x = b$ ($a < b$) вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

№ 4. К движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой сила $f=2x-1$, где x – координата движущейся точки. Вычислите работу силы F по перемещению точки от 0 до 3.

$$A = \int_0^3 (2x - 1) dx = (x^2 - x) \Big|_0^3 = 6$$

Масса стержня переменной плотности

M

$$= \int_a^b \rho(x) dx$$

Координата центра массы

$$x' = \frac{1}{M} \int_a^b x \rho(x) dx$$

№ 5. Вычислить массу стержня на отрезке от 0 до 2, если его плотность задаётся функцией

$$\rho(x) = x + 1$$

$$M = \int_0^2 (x + 1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = 4$$

Путь прямолинейного движения

Путь S , пройденный материальной точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определённому интегралу от скорости $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t) dt$$

№ 6. Вычислить путь, пройденный точкой за 4 секунды от начала движения, если скорость точки $v = 2t + 4$ (м/с).

$$S = \int_0^4 (2t + 4) dt = 2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 + 4t \Big|_0^4 = 4^2 + 4 \cdot 4 = 32$$

Спасибо за внимание!

