

Разложение многочленов на множители.



Обобщающий урок по теме
«Разложение на множители»



Немного теории

Разложить многочлен на множители значит представить его в виде произведения более простых многочленов.

Существует несколько способов разложения:

- Вынесение общего множителя за скобки
- Способ группировки
- С помощью формул сокращенного умножения

Сначала убедимся в том что разложение на множители –вещь полезная.

Вам предлагают решить уравнение $2x^2+x-6=0$.

Для таких уравнений имеется специальное правило решения, но вы его пока еще не знаете.

Как быть?



Воспользуемся разложением многочлена на множители:

$$2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)$$

Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

$$(2x-3)(x+2)=0$$

Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю. Значит,

$$\text{либо } 2x-3=0,$$

$$\text{либо } x+2=0.$$

Из первого уравнения $x=1,5$, а из второго уравнения $x=-2$.

Уравнение решено, оно имеет два корня: 1,5 и -2 .

Рассмотрим другую ситуацию

Пусть нужно найти значение числового выражения

$$\frac{53^2 - 47^2}{61^2 - 39^2}$$

Самое эффективное решение — дважды воспользоваться формулой разности квадратов:

$$\frac{53^2 - 47^2}{61^2 - 39^2} = \frac{(53 - 47)(53 + 47)}{(61 - 39)(61 + 39)} = \frac{6 \cdot 100}{22 \cdot 100} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

Разложение на множители позволило нам сократить дробь. Позднее мы оценим это и при выполнении действий с алгебраическими дробями.

Таким образом, разложение многочлена на множители используется для решения уравнений, для преобразования числовых и алгебраических выражений. Применяется оно и в других ситуациях, как, скажем, в следующем довольно трудном, но красивом примере, где ключ к успеху **опять-таки в разложении на множители.**

ПРИМЕР

Доказать, что для любого натурального числа n выражение n^3+3n^2+2n делится без остатка на 6.

Попробуйте его решить

Посмотрите, как легко это можно сделать

Пусть $p(n) = n^3 + 3n^2 + 2n$.

Если $n=1$, то $p(1)=1+3+2=6$. Значит, $p(1)$ делится на 6 без остатка.

Если $n=2$, то $p(2)=2^3+3\cdot 2^2+2\cdot 2=8+12+4=24$. Следовательно, и $p(2)$ делится на 6 без остатка.

Если $n=3$, то $p(3)=3^3+3\cdot 3^2+2\cdot 3=27+27+6=60$. Поэтому и $p(3)$ делится на 6 без остатка.

Но вы же понимаете, что перебрать так все натуральные числа нам не удастся. Как быть? На помощь приходят алгебраические методы.

Имеем: $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$.

В самом деле $n(n+1) = n^2 + n$, а $(n^2 + n)(n+2) = n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n = n^3 + 3n^2 + 2n$.

Итак, $p(n) = n(n+1)(n+2)$, т.е. $p(n)$ есть произведение трех идущих подряд натуральных чисел n , $n+1$, $n+2$. Но из трех таких чисел одно обязательно делится на 3, значит и их произведение делится на 3. Кроме того, по крайней мере одно из этих чисел – четное, т.е. делится на 2. Итак, $p(n)$ делится и на 2, и на 3, т.е. делится на 6.

Все прекрасно, скажите вы, но как догадаться, что $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$?

Ответ очевиден: надо учиться разложению многочленов на множители.

К этому и перейдем.



Вынесение общего множителя за скобки

Алгоритм отыскания общего множителя нескольких одночленов

1. *Найти наибольший общий делитель коэффициентов всех одночленов, входящих в многочлен, - он и будет общим числовым множителем (разумеется, это относится только к случаю целочисленных коэффициентов).*
2. *Найти переменные, которые входят в каждый член многочлена, и выбрать для каждой из них наименьший (из имеющихся) показатель степени.*
3. *Произведение коэффициента, найденного на первом шаге, является общим множителем, который целесообразно вынести за скобки.*

Пример

Разложить на множители:

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2.$$

Воспользуемся сформулированным алгоритмом.

- 1) Наибольший общий делитель коэффициентов -1 , -2 и 5 равен 1 .
- 2) Переменная x входит во все члены многочлена с показателями соответственно 4 , 3 , 2 ; следовательно, можно вынести за скобки x^2 .
- 3) Переменная y входит не во все члены многочлена; значит, ее нельзя вынести за скобки.

Вывод: за скобки можно вынести x^2 . Правда, в данном случае целесообразнее вынести $-x^2$. Получим:

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2 = -x^2(x^2y^3 + 2xy^2 - 5).$$

Способ группировки

Для уяснения сути способа группировки рассмотрим следующий пример:

разложить на множители многочлен $xy-6+3y-2y$

Первый способ группировки:

$$xy-6+3y-2y=(xy-6)+(3x-2y).$$

Группировка неудачна.

Второй способ группировки:

$$xy-6+3y-2y=(xy+3x)+(-6-2y)=x(y+3)-2(y+3)=(y+3)(x-2).$$

Третий способ группировки:

$$xy-6+3y-2y=(xy-2y)+(-6+3x)=y(x-2)+3(x-2)=(x-2)(y+3).$$

Ответ: $xy-6+3y-2y=(x-2)(y+3)$.

Как видите, не всегда с первого раза группировка оказывается удачной. Если группировка оказалась неудачной, откажитесь от нее, ищите иной способ. По мере приобретения опыта, вы будете быстро находить удачную группировку.



Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения

Вспомните эти формулы:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b); \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2); \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2); \\ a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2; \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2.\end{aligned}$$

Первую из этих формул можно применять к выражению, представляющему собой *разность квадратов* (безразлично чего – чисел, одночленов, многочленов), вторую и третью – к выражению, представляющему собой *разность* (или *сумму*) *кубов*; последние две формулы применяются к трехчлену, представляющему собой *полный квадрат*, т.е. содержащему сумму квадратов двух выражений и удвоенное произведение тех же выражений.

Примеры

Разложить на множители:

1) $x^6 - 4a^4$. Воспользуемся первой формулой (разность квадратов):

$$x^6 - 4a^4 = (x^3)^2 - (2a^2)^2 = (x^3 - 2a^2)(x^3 + 2a^2).$$

2) $a^6 + 27b^3$. Воспользуемся третьей формулой (сумма кубов):

$$\begin{aligned} a^6 + 27b^3 &= (a^2)^3 + (3b)^3 = (a^2 + 3b)((a^2)^2 - a^2 \cdot 3b + (3b)^2) = \\ &= (a^2 + 3b)(a^4 - 3a^2b + 9b^2). \end{aligned}$$

3) $a^2 - 4ab + 4b^2$. В этом примере дан трехчлен, для его разложения на множители будем пользоваться пятой формулой, если, конечно, убедимся в том, что трехчлен является полным квадратом:

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = a^2 + (2b)^2 - 2 \cdot a \cdot 2b = (a - 2b)^2.$$

Мы убедились, что трехчлен содержит сумму квадратов одночленов a и $2b$, а также удвоенное произведение этих одночленов. Значит, это полный квадрат, причем квадрат разности.



Разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов

- В математике не так часто бывает, чтобы при решении примера применялся только один прием, чаще встречаются комбинированные примеры, где сначала используется один прием, затем другой и т.д. Чтобы успешно решать такие примеры, мало знать сами приемы, надо еще уметь выработать план их последовательного применения. Иными словами, здесь нужны не только знания, но и опыт. Вот такие комбинированные примеры мы и рассмотрим.

Пример 1

Разложить на множители многочлен

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5$$

- 1) Сначала займемся вынесением общего множителя за скобки. Рассмотрим коэффициенты 36, 96, 64. Все они делятся на 4, причем это – наибольший общий делитель, вынесем его за скобки. Во все члены многочлена входит переменная a (соответственно a^6 , a^4 , a^2), поэтому за скобки можно вынести a^2 . Точно так же во все члены многочлена входит переменная b (соответственно b^3 , b^4 , b^5) – за скобки можно вынести b^3 .

Итак, за скобки вынесем $4a^2b^3$. Тогда получим:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(9a^4 - 24a^2b + 16b^2).$$

- 2) Рассмотрим трехчлен в скобках: $9a^4 - 24a^2b + 16b^2$. Выясним, не является ли он полным квадратом. Имеем:

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2)^2 + (4b)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 4b.$$

Все условия полного квадрата соблюдены, следовательно,

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2 - 4b)^2.$$

- 3) Комбинируя два приема (вынесение общего множителя за скобки и использование формул сокращенного умножения), получаем окончательный результат:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(3a^2 - 4b)^2.$$

Пример 2

Разложить на множители

$$x^4 + x^2 a^2 + a^4$$

Применим метод выделения полного квадрата.

Для этого представим $x^2 a^2$ в виде $2x^2 a^2 - x^2 a^2$.

Получим:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 a^2 + a^4 &= x^4 + 2x^2 a^2 - x^2 a^2 + a^4 = \\ &= (x^4 + 2x^2 a^2 + a^4) - x^2 a^2 = \\ &= (x^2 + a^2)^2 - (xa)^2 = (x^2 + a^2 + xa). \end{aligned}$$

Пример 3

Разложить на множители

$$n^3 + 3n^2 + 2n$$

Сначала воспользуемся тем, что n можно вынести за скобки: $n(n^2 + 3n + 2)$. Теперь к трехчлену $n^2 + 3n + 2$ применим способ группировки, предварительно представив $3n$ в виде $2n + n$. Получим:

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 2 &= n^2 + 2n + n + 2 = (n^2 + 2n) + (n + 2) = \\ &= n(n + 2) + (n + 2) = (n + 2)(n + 1). \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2).$$

Пример 4

Решить уравнение

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Первый способ. Представим $-6x$ в виде суммы $-x-5x$, а затем применим способ группировки:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 5x + 5 = (x^2 - x) + (-5x + 5) = x(x-1) - 5(x-1) = (x-1)(x-5).$$

Тогда заданное уравнение примет вид:

$$(x-1)(x-5) = 0,$$

откуда находим, что либо $x=1$, либо $x=5$.

Второй способ. Применим метод выделения полного квадрата, для чего представим слагаемое 5 в виде 9-4. Получим:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= x^2 - 6x + 9 - 4 = (x^2 - 6x + 9) - 4 = \\ &= (x-3)^2 - 2^2 = (x-3-2)(x-3+2) = (x-5)(x-1). \end{aligned}$$

Снова пришли к уравнению $(x-1)(x-5) = 0$, имеющему корни 1 и 5.

Ответ: 1, 5.



Сокращение алгебраических дробей

Алгебраической дробью называется отношение двух
многочленов P и Q . При этом используют запись $\frac{P}{Q}$



Тождества

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2;$$

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Написанные равенства верны при любых значениях входящих в их состав переменных. Такие равенства называют *тождествами*. Левую и правую часть тождества называют выражениями, **тождественно равными**. Замену одного выражения другим, тождественным ему, называют **тождественным преобразованием** выражения.

Определение. Тождество — это равенство, верное *при любых допустимых* значениях входящих в его состав переменных.



ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- Мы ввели новые (для вас) понятия математического языка:
разложение многочлена на множители;
алгебраическая дробь, сокращение алгебраической дроби;
тождество, тождественно равные выражения,
тождественное преобразование выражения.
- Вы познакомились со следующими приемами разложения
многочлена на множители:
вынесение общего множителя за скобки;
группировка;
использование формул сокращенного умножения;
выделение полного квадрата.

На этом мы и закончим

наш
сегодняшний
урок

