

639. Показать, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $7/3, 10/5, 13/7, \dots (3n+4)/(2n+1), \dots$ имеет пределом число $3/2$.

$\triangle$ Здесь $x_n - 3/2 = (3n+4)/(2n+1) - 3/2 = 5/[2(2n+1)]$. Определим, при каком значении n выполняется неравенство $5/[2(2n+1)] < \varepsilon$; так как $2(2n+1) >$

$> 5/\varepsilon$, то $n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$. Итак, если $n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$, то $|x_n - 3/2| < \varepsilon$, т. е.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x = 3/2$.

Полагая $\varepsilon = 0,1$, заключаем, что неравенство $|x_n - 3/2| < 0,1$ выполняется при $n > 12$ (например, при $n = 13$). Аналогично, неравенство $|x_n - 3/2| < 0,01$ выполняется при $n > 124,5$ (например, при $n = 125$), а неравенство $|x_n - 3/2| < 0,001$ — при $n > 1249,5$ (например, при $n = 1250$). $\blacktriangle$

Найти следующие пределы:

$$640. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x + 2}{2x + 3}.$$

$\triangle$ Так как $x \rightarrow 4$, то числитель дроби стремится к числу $5 \cdot 4 + 2 = 22$, а знаменатель — к числу $2 \cdot 4 + 3 = 11$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x + 2}{2x + 3} = \frac{22}{11} = 2$. $\blacktriangle$

$$641. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{2x + 7}.$$

$\triangle$ Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при $x \rightarrow \infty$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида ∞/∞ . Разделив на x числитель и знаменатель дроби, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{2x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 5/x}{2 + 7/x} = \frac{3}{2},$$

так как при $x \rightarrow \infty$ каждая из дробей $5/x$ и $7/x$ стремится к нулю. $\blacktriangle$

$$642. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}.$$

$\triangle$ Здесь числитель и знаменатель дроби при $x \rightarrow 3$ стремятся к нулю (неопределенность вида $0/0$). Имеем

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x};$$

если $x \neq 3$, то $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x}$. Но при $x \rightarrow 3$ дробь $\frac{x+3}{x}$ стремится к числу $\frac{3+3}{3} = 2$. Итак, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2$. $\blacktriangle$

$$643. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$

$\triangle$ Здесь имеет место неопределенность вида $0/0$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^2(x+1) - (x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$644. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x}.$$

△ Это — также неопределенность вида $0/0$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x - 10)(x^2 + 10x + 100)}{x(x - 10)^2} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 + 10x + 100}{x(x - 10)}.$$

△ Если $x \rightarrow a - 0$, то $1/(x - a) \rightarrow -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow a - 0} f(x) = 0$. Если же $x \rightarrow a + 0$, то $1/(x - a) \rightarrow +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow a + 0} f(x) = +\infty$. ▲

655. Показать, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $1/2, 5/3, 9/4, \dots, (4n - 3)/(n + 1), \dots$ имеет предел, равный 4.

656. Показать, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $1, 1/3, 1/5, \dots, 1/(2n - 1), \dots$ является бесконечно малой.

Найти следующие пределы:

$$657. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}. \quad 658. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}.$$

$$659. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}. \quad 660. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$661. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2}. \quad 662. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}.$$

$$663. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0}. \quad 664. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}.$$

$$665. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}. \quad 666. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 5x - 6}{x^3 + 3x^2 + 7x - 1}.$$

● Положить $\pi/2 - x = \alpha$.

667. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 + 4x + 5)(x^2 + x + 1)}{(x + 2)(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x - 1)}$. 668. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$.
669. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1}$. 670. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2}$.
671. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$. 672. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{7x + 2x - x^2}}{x^2 - 2x}$.
673. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$. 674. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.
675. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + mx)}{x}$. 676. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2^x + 3}{2^x - 3}$.
677. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + d})$.
678. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x + 1} - \sin \sqrt{x})$.
679. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x})$. 680. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 5^x}{1 - e^x}$.
681. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x}$. 682. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1 + x)}$.
683. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x}$. 684. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$.

● Положить $x = t^4$.

$$689. \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x. \quad 690. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1}.$$

$$691. \text{Найти } \lim_{t \rightarrow \infty} t (\sqrt[t]{a} - 1) \text{ (где } t > 0).$$

● Положить $x = 1/t$, где $x \rightarrow 0$.

$$692. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 1}.$$

$$693. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x.$$

$$694. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right).$$

$$695. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 - x}.$$

● Привести дроби к общему знаменателю.

$$696. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}. \quad 697. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x)}{x}.$$

● Учесть, что $x^x = e^{x \ln x}$,

$$698. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 + 7}{2x^5 + 3x^4 + 1}. \quad 699. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{x}.$$

$$700. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x. \quad 701. \lim_{\alpha \rightarrow 0} (2 - \cos \alpha)^{\operatorname{cosec}^2 \alpha}.$$

$$702. \text{Найти } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{x+c}. \quad 703. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{1/(x-2)}.$$

- 1) $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ — предел функции $f(x)$ в точке x_0 ;
- 2) $l = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ — правый предел функции $f(x)$ в точке x_0 ;
- 3) $l = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ — левый предел функции $f(x)$ в точке x_0 ;
- 4) $l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$;
- 5) $l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$;

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow a$.

1. Если $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha/\beta) = 0$, то говорят, что α является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с β . В этом случае пишут $\alpha = o(\beta)$.

2. Если $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha/\beta) = m$, где m — число, отличное от нуля, то говорят, что α и β — бесконечно малые одного и того же порядка. В частности, если $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha/\beta) = 1$, то бесконечно малые α и β называются эквивалентными. Запись $\alpha \sim \beta$ означает, что α и β — эквивалентные бесконечно малые.

Если $\alpha/\beta \rightarrow \infty$, то это означает, что $\lim (\beta/\alpha) = 0$. Таким образом, β является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с α , т. е. $\beta = o(\alpha)$.

3. Если α^k и β — бесконечно малые одного и того же порядка, причем $k > 0$, то говорят, что бесконечно малая β имеет порядок k по сравнению с α .

Отметим некоторые свойства бесконечно малых:

1°. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с сомножителями, т. е. если $\gamma = \alpha\beta$, то $\gamma = o(\alpha)$ и $\gamma = o(\beta)$.

2°. Бесконечно малые α и β эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность $\alpha - \beta = \gamma$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с α и β , т. е. если $\gamma = o(\alpha)$, $\gamma = o(\beta)$, то $\alpha \sim \beta$.

3°. Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой, т. е. если $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha/\beta) = m$, $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, то $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha_1/\beta_1) = m$.

Полезно иметь в виду эквивалентность следующих бесконечно малых: если $x \rightarrow 0$, то

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x.$$

704. Пусть t — бесконечно малая. Сравнить бесконечно малые $\alpha = 5t^2 + 2t^5$ и $\beta = 3t^2 + 2t^3$.

$\triangle$ Имеем $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5t^2 + 2t^5}{3t^2 + 2t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5 + 2t^3}{3 + 2t} = \frac{5}{3}$. Так как предел отношения α и β есть число, отличное от нуля, то α и β — бесконечно малые одного и того же порядка. $\blacktriangle$

705. Сравнить бесконечно малые $\alpha = t \sin^2 t$ и $\beta = 2t \sin t$ при $t \rightarrow 0$.

$\triangle$ Здесь $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sin^2 t}{2t \sin t} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$, т. е. $\alpha = o(\beta)$. $\blacktriangle$

706. Сравнить бесконечно малые $\alpha = t \ln(1 + t)$, $\beta = t \sin t$ при $t \rightarrow 0$.

$\triangle$ Находим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln(1 + t)}{t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + t)}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = 1,$$

т. е. $\alpha \sim \beta$. $\blacktriangle$

707. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2}$.

$\triangle$ Заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно малыми: $\ln(1 + 3x \sin x) \sim 3x \sin x$, $\operatorname{tg} x^2 \sim x^2$. Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin x}{x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 3. \blacktriangle$$

708. Определить порядок бесконечно малой $y = xe^x$ по сравнению с бесконечно малой x .

709. Определить порядок бесконечно малой $y = \sqrt{1 + x \sin x} - 1$ по сравнению с бесконечно малой x .

710. Определить порядок бесконечно малой $y = \sqrt{\sin 2x}$ по сравнению с x при $x \rightarrow 0$.

711. Сравнить бесконечно малые $\alpha = t^2 \sin^2 t$ и $\beta = t \operatorname{tg} t$, если $t \rightarrow 0$.

712. Сравнить бесконечно малые $\alpha = (1 + x)^m - 1$ и $\beta = mx$, если $x \rightarrow 0$ и m — рациональное положительное число.

713. Сравнить бесконечно малые $\alpha = a^x - 1$ и $\beta = x \ln a$, если $x \rightarrow 0$.

Найти следующие пределы:

$$714. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\operatorname{tg} 3x} . \quad 715. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2 (1+2x)} .$$

● Заменить числитель
и знаменатель эквивалентными бесконечно малыми.

$$716. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln (1-4x)} . \quad 717. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln (1+x-3x^2+2x^3)}{\ln (1+3x-4x^2+x^3)} .$$
$$718. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln (1+x^2)} . \quad 719. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin (e^{x-1}-1)}{\ln x} .$$

● Представить $\cos x$ в виде
 $1 - (1 - \cos x)$.

$$720. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3 - 1}}{(1+x) \sqrt[3]{(1+x)^2 - 1}}. \quad 721. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(5^\alpha - 1)(4^\alpha - 1)}{(3^\alpha - 1)(6^\alpha - 1)}.$$

$$722. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2}.$$

● Разделить на 2 числитель и знаменатель.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a* , если: 1) эта функция определена в некоторой окрестности точки a ; 2) существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$; 3) этот предел равен значению функции в точке a , т. е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Обозначая $x - a = \Delta x$ (приращение аргумента) и $f(x) - f(a) = \Delta y$ (приращение функции), условие непрерывности можно записать так: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, т. е. *функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.*

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области (интервала, сегмента и т. п.), то она называется *непрерывной в этой области*.

Точка a , принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$, причем не все три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ равны между собой, то a называется *точкой разрыва I рода*.

Точки разрыва I рода подразделяются, в свою очередь, на *точки устранимого разрыва* (когда $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$, т. е. когда левый и правый пределы функции в точке a равны между собой, но не равны значению функции в этой точке) и на *точки скачка* (когда $f(a-0) \neq f(a+0)$, т. е. когда левый и правый пределы функции в точке a различны); в последнем случае разность $f(a+0) - f(a-0)$ называется *скачком* функции в точке a . Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются *точками разрыва II рода*. В точках разрыва II рода не существует хотя бы один из односторонних пределов.

Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, где делитель не равен нулю.

723. Показать, что при $x=4$ функция $y = \frac{x}{x-4}$ имеет разрыв.

$\triangle$ Находим $\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty$. Таким образом, функция при $x \rightarrow 4$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, $x=4$ является точкой разрыва II рода (рис. 26). $\blacktriangle$

724. Показать, что при $x = 4$ функция $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}$ имеет разрыв.

△ Если $x \rightarrow 4-0$, то $1/(x-4) \rightarrow -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 4-0} y = -\pi/2$. Если же $x \rightarrow 4+0$, то $1/(x-4) \rightarrow +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 4+0} y = \pi/2$. Итак, при $x \rightarrow 4$ функция имеет как левый, так и правый конечный предел, причем эти пределы различны. Следовательно, $x = 4$ является точкой разрыва I рода — точкой скачка. Скачок функции в этой точке равен $\pi/2 - (-\pi/2) = \pi$ (рис. 27). ▲

725. Показать, что при $x=5$ функция $y = \frac{x^2-25}{x-5}$ имеет разрыв.

△ В точке $x=5$ функция не определена, так как, выполнив подстановку, получаем неопределенность $0/0$. В других точках дробь можно сократить на $x-5$, так как $x-5 \neq 0$. Следовательно, $y = x+5$ при $x \neq 5$. Легко видеть, что $\lim_{x \rightarrow 5-0} y = \lim_{x \rightarrow 5+0} y = 10$.

Таким образом, при $x=5$ функция имеет устранимый разрыв. Он будет устранен, если условиться, что $y=10$ при $x=5$.

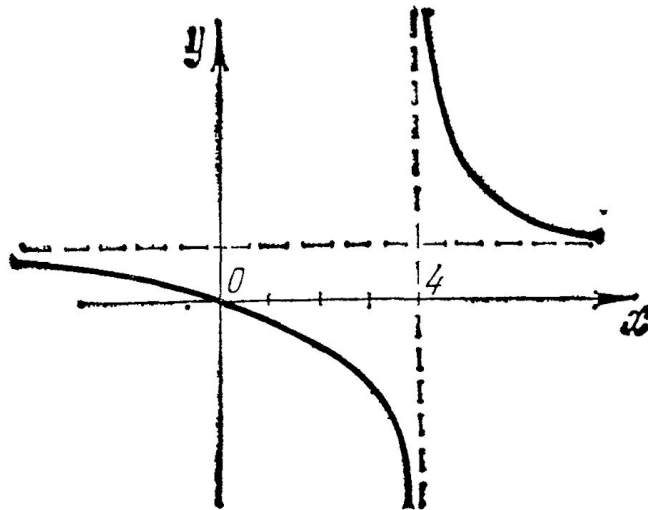


Рис. 26

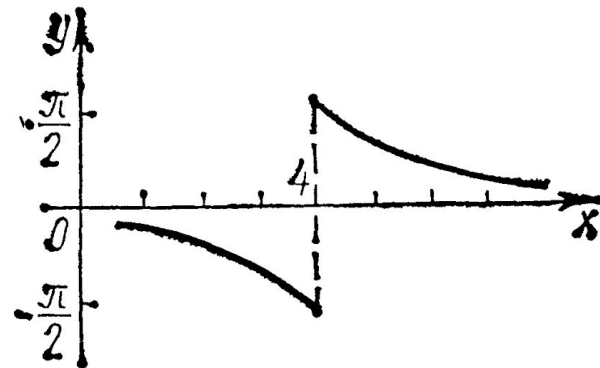


Рис. 27

Итак, можно считать, что функция $y = (x^2-25)/(x-5)$ непрерывна при всех значениях x , если считать, что равенство $(x^2-25)/(x-5) = x+5$ справедливо при всех значениях x , не исключая и $x=5$. В этом случае график функции есть прямая $y = x+5$. ▲

726. Найти точки разрыва функции $y = \frac{2^{1/(x-2)} - 1}{2^{1/(x-2)} + 1}$.

727. Найти точки разрыва функции $y = \frac{1}{(x-1)(x-5)}$.

728. Каков характер разрыва функции $y = \frac{1}{1 - e^{1-x}}$ в точке $x = 1$?

729. Каков характер разрыва функции $y = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$?

730. Найти точки разрыва функции $y = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}}{x(x-5)}$.

731. Найти точки разрыва функции $y = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

732. Найти точки разрыва функции $y = \frac{x+1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$.

733. Найти точки разрыва функции $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

734. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{1}{(x-1)(x-6)}$ на отрезке: 1) $[2, 5]$; 2) $[4, 10]$; 3) $[0, 7]$.

735. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{1}{x^4 - 26x^2 + 25}$ на отрезке: 1) $[6, 10]$; 2) $[-2, 2]$; 3) $[-6, 6]$.

Производная и дифференциал

1. Дифференцирование явных функций. Пусть x_1 и x_2 — значения аргумента, а $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ — соответствующие значения функции $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называется *приращением аргумента*, а разность $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ — *приращением функции* на отрезке $[x_1, x_2]$.

Производной от функции $y = f(x)$ по аргументу x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ или } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(производная обозначается также $\frac{dy}{dx}$).

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x , т. е. $y' = \operatorname{tg} \alpha$.

Производная есть *скорость изменения* функции в точке x .

Отыскание производной называется *дифференцированием* функции.

Формулы дифференцирования основных функций

$$\text{I. } (x^m)' = mx^{m-1}.$$

$$\text{II. } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{III. } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\text{IV. } (e^x)' = e^x.$$

$$\text{V. } (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$\text{VI. } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$\text{VII. } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$\text{VIII. } (\sin x)' = \cos x.$$

$$\text{IX. } (\cos x)' = -\sin x.$$

$$\text{X. } (\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x.$$

$$\text{XI. } (\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

$$\text{XII. } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{XIII. } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{XIV. } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{XV. } (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{XVI. } (\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x.$$

$$\text{XVII. } (\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x.$$

$$\text{XVIII. } (\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\text{XIX. } (\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Основные правила дифференцирования

Пусть C — постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции, имеющие производные. Тогда:

1) $C' = 0$; 2) $x' = 1$; 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 4) $(Cu)' = Cu'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$; 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

7) если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

(правило дифференцирования сложной функции).

736. Исходя из определения производной (не пользуясь формулами дифференцирования), найти производную функции $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.

△ Дадим x приращение Δx , тогда y получит приращение Δy :

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Найдем приращение функции:

$$\begin{aligned}\Delta y &= [2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4] - (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) = \\ &= 6x^2 \Delta x + 6x \Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x \Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x.\end{aligned}$$

Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x \Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x^2 + 6x \Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7.$$

Следовательно, по определению производной $y' = 6x^2 + 10x - 7$. ▲

737. Исходя из определения производной, найти производную функции $y = \sqrt{x}$.

△ Находим приращение функции: $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$. Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \text{ и } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Итак, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. ▲

738. Исходя из определения производной, найти производную функции $y = -\operatorname{ctg} x - x$.

△ Находим

$$\Delta y = -\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - (x + \Delta x) + \operatorname{ctg} x + x = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \Delta x.$$

Используя формулу $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$, получим

$$\Delta y = \frac{\sin(x + \Delta x - x)}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin \Delta x}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - \Delta x,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - 1$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Итак, $y' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x$. ▲

Исходя из определения производной, найти производные функций:

739. $y = \frac{1}{x^2}$. 740. $y = \sqrt[3]{x^2}$. 741. $y = 5 \sin x + 3 \cos x$.

742. $y = 5(\operatorname{tg} x - x)$. 743. $y = \frac{1}{e^x + 1}$. 744. $y = 2^{x^2}$.

Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

745. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4.$

$$\begin{aligned}\Delta y' &= (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (4)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7x' + 4' = \\ &= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7. \blacktriangle\end{aligned}$$

746. $y = x^2 e^x.$

$$\Delta y' = x^2 (e^x)' + e^x \cdot (x^2)' = x^2 e^x + 2x e^x = x e^x (x + 2). \blacktriangle$$

747. $y = x^3 \operatorname{arctg} x.$

$$\begin{aligned}\Delta y' &= x^3 (\operatorname{arctg} x)' + \operatorname{arctg} x \cdot (x^3)' = x^3 \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 \operatorname{arctg} x = \\ &= \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \operatorname{arctg} x. \blacktriangle\end{aligned}$$

748. $y = x \sqrt{x} (3 \ln x - 2).$

$$\begin{aligned}\Delta \text{ Перепишем заданную функцию в виде } y &= x^{3/2} (3 \ln x - 2). \text{ Тогда } y' = \\ &= x^{3/2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{3}{2} x^{1/2} (3 \ln x - 2) = 3x^{1/2} + \frac{9}{2} x^{1/2} \ln x - 3x^{1/2} = \frac{9}{2} \sqrt{x} \ln x. \blacktriangle\end{aligned}$$

$$749. y = \frac{\arcsin x}{x}.$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{x \cdot (\arcsin x)' - \arcsin x \cdot (x)'}{x^2} = \\ &= \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}. \blacktriangle \end{aligned}$$

$$750. y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}. \blacktriangle \end{aligned}$$

$$751. y = (2x^3 + 5)^4.$$

Δ Обозначим $2x^3 + 5 = u$, тогда $y = u^4$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = (u^4)'_u \cdot (2x^3 + 5)'_x = 4u^3 (6x^2) = 24x^2 (2x^3 + 5)^3. \blacktriangle$$

$$752. y = \operatorname{tg}^6 x.$$

$$\Delta y' = 6 \operatorname{tg}^5 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 6 \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x. \blacktriangle$$

$$753. y = \cos^2 x.$$

$$\Delta y' = 2 \cos x (\cos x)' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x. \blacktriangle$$

$$754. y = \sin (2x + 3).$$

$$\Delta y' = \cos (2x + 3) \cdot (2x + 3)' = 2 \cos (2x + 3). \blacktriangle$$

$$755. y = \operatorname{tg} \ln x.$$

$$\Delta y' = \sec^2 \ln x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot \sec^2 \ln x. \blacktriangle$$

$$756. y = \sin^3 \frac{x}{3}.$$

$$\Delta y' = 3 \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \left(\sin \frac{x}{3} \right)' = 3 \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \left(\frac{x}{3} \right)' = \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}. \blacktriangle$$

$$757. y = \ln (x^2 + 5).$$

$$\Delta y' = \frac{1}{x^2 + 5} \cdot (x^2 + 5)' = \frac{2x}{x^2 + 5}. \blacktriangle$$

$$758. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{1}{\operatorname{tg} (x/2)} \cdot (\operatorname{tg} (x/2))' = \frac{1}{\operatorname{tg} (x/2)} \cdot \sec^2 (x/2) \cdot (x/2)' = \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{tg} (x/2) \cos^2 (x/2)} = \frac{1}{2 \sin (x/2) \cos (x/2)} = \frac{1}{\sin x} \cdot \blacktriangle \end{aligned}$$

$$759. y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \blacktriangle \end{aligned}$$

$$760. y = \ln (\sqrt{2 \sin x + 1} + \sqrt{2 \sin x - 1}).$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{1}{\sqrt{2 \sin x + 1} + \sqrt{2 \sin x - 1}} (\sqrt{2 \sin x + 1} + \sqrt{2 \sin x - 1})' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \sin x + 1} + \sqrt{2 \sin x - 1}} \left(\frac{2 \cos x}{2 \sqrt{2 \sin x + 1}} + \frac{2 \cos x}{2 \sqrt{2 \sin x - 1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \sin x + 1} + \sqrt{2 \sin x - 1}} \frac{\cos x (\sqrt{2 \sin x + 1} + \sqrt{2 \sin x - 1})}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}} = \\ &= \frac{\cos x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}} \cdot \blacktriangle \end{aligned}$$

$$762. y = \arcsin \frac{2x^2}{1+x^4}, \quad |x| < 1.$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}} \times \\ &\times \frac{(1+x^4) \cdot 4x - 2x^2 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^4 + x^8}} \cdot \frac{4x(1-x^4)}{1+x^4} = \frac{4x}{1+x^4}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$763. y = \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{3}.$$

$$\Delta y' = \frac{1}{1 + (\ln^2 x)/9} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{3}{x(9 + \ln^2 x)}. \quad \blacktriangle$$

$$764. y = e^x \cdot \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}}.$$

Δ Записав данную функцию в виде

$$y = e^x \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}),$$

получим

$$\begin{aligned} y' &= e^x \cdot \frac{1}{1 + e^{2x}} \cdot e^x + e^x \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + e^{2x}} e^{2x} \cdot 2 = \\ &= \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} + e^x \operatorname{arctg} e^x - \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = e^x \operatorname{arctg} e^x. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$765. y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

△ Преобразуем данную функцию:

$$y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln(1 + \sin x) - \ln \cos x.$$

Тогда

$$y' = \frac{\cos^2 x \cos x - \sin x \cdot 2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} + \frac{1}{1 + \sin x} \cos x - \frac{1}{\cos x} (-\sin x),$$

или

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x (1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \\ &+ \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\cos^3 x} = 2 \sec^3 x. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$766. y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} + \ln \cos \sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned} \triangle y' &= \operatorname{tg} \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos \sqrt{x}} (-\sin \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg} \sqrt{x} (\sec^2 \sqrt{x} - 1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$767. y = 5 \operatorname{sh}^3 \frac{x}{15} + 3 \operatorname{sh}^5 \frac{x}{15}.$$

△ Находим

$$y' = 15 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \operatorname{ch} \frac{x}{15} \cdot \frac{1}{15} + 15 \operatorname{sh}^4 \frac{x}{15} \operatorname{ch} \frac{x}{15} \cdot \frac{1}{15} = \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \operatorname{ch} \frac{x}{15} \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \right),$$

откуда, используя соотношение $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, окончательно получаем $y' = \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \operatorname{ch}^3 \frac{x}{15}$. ▲

$$768. y = x^{x^2}.$$

△ Здесь основание и показатель степени зависят от x . Логарифмируя, получим $\ln y = x^2 \ln x$. Продифференцируем обе части последнего равенства по x . Так как y является функцией от x , то $\ln y$ есть сложная функция x и $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$. Следовательно,

$$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x, \quad \frac{y'}{y} = x(1 + 2 \ln x),$$

т. е.

$$y' = xy(1 + 2 \ln x) = xx^{x^2}(1 + 2 \ln x) = x^{x^2+1}(1 + 2 \ln x). \quad \blacktriangle$$

$$769. y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

△ Имеем $\ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x$, откуда

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \sec^2 x \ln \sin x = 1 + \sec^2 x \ln \sin x;$$

$$y' = y(1 + \sec^2 x \ln \sin x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} (1 + \sec^2 x \ln \sin x). \quad \blacktriangle$$

$$770. y = \frac{(2x-1)^3 \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}}.$$

△ Здесь заданную функцию также следует предварительно прологарифмировать:

$$\ln y = 3 \ln (2x-1) + \frac{1}{2} \ln (3x+2) - 2 \ln (5x+4) - \frac{1}{3} \ln (1-x);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x-1} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3x+2} - 2 \cdot \frac{5}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)};$$

$$y' = \frac{(2x-1)^3 \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}} \left[\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)} \right]. \blacktriangle$$

Найти производные функций:

$$771. y = \frac{7}{x^3}. \quad 772. y = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}.$$

$$773. y = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} - \frac{4}{11} x^5 \sqrt{x} + \frac{2}{15} x^7 \sqrt{x}.$$

$$774. y = (x^2 + 2x + 2) e^{-x}. \quad 775. y = 3x^3 \ln x - x^3.$$

$$776. y = \frac{2^{3x}}{3^{2x}}. \quad 777. y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$$

$$778. y = \ln (2x^3 + 3x^2). \quad 779. y = \sqrt{1-3x^2}.$$

$$780. y = x \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}.$$

$$781. y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}.$$

$$782. y = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2. \quad 783. y = \cos^3 (x/3).$$

$$784. y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}. \quad 785. y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

$$786. y = \operatorname{tg} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 2x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 2x.$$

$$787. y = \frac{1}{3} \sin^3 \sqrt{x} - \frac{2}{5} \sin^5 \sqrt{x} + \frac{1}{7} \sin^7 \sqrt{x}.$$

$$788. y = \ln (3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1}). \quad 789. y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$790. y = \ln \frac{\sqrt{4 \operatorname{tg} x + 1} - 2 \sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{4 \operatorname{tg} x + 1} + 2 \sqrt{\operatorname{tg} x}}. \quad 791. y = -\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 2 \ln \sin \frac{x}{2}.$$

$$792. y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x^2 - 1}. \quad 793. y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$794. y = \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}. \quad 795. y = \arcsin \frac{2x^3}{1 + x^6}, \text{ если } |x| < 1.$$

$$796. y = \arccos \frac{9 - x^2}{9 + x^2}. \quad 797. y = e^{-x} - \sin e^{-x} \cos e^{-x}.$$

2. Дифференцирование неявных функций. Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как неявную функцию от x . В дальнейшем будем считать эту функцию дифференцируемой.

Продифференцировав по x обе части уравнения $F(x, y) = 0$, получим уравнение первой степени относительно y' . Из этого уравнения легко находится y' , т. е. производная неявной функции для всех значений x и y , при которых множитель при y' в уравнении не обращается в нуль.

896. Найти производную y'_x из уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

△ Так как y является функцией от x , то будем рассматривать y^2 как сложную функцию от x . Следовательно, $(y^2)' = 2yy'$. Продифференцировав по x обе части данного уравнения, получим $2x + 2yy' = 0$, т. е. $y' = -x/y$. ▲

897. Найти производную y'_x из уравнения $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

△ Дифференцируя по x обе части уравнения, получаем

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y y' - 2x e^y = 0, \text{ т. е. } y' = \frac{(2x e^y - 3x^2) y}{1 - x^2 y e^y}. \quad \blacktriangle$$

Найти производную y'_x от неявных функций:

898. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

899. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

900. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0$.

901. $x^y - y^x = 0$. 902. $x \sin y + y \sin x = 0$.

903. $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$.

904. $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$.

905. $\frac{y}{x} + e^{y/x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$. 906. $xy^2 + y^2 \ln x - 4 = 0$.

907. $x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0$.

3. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Если функция аргумента x задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

908. Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, если $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$.

$\triangle$ Найдем $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 3$, $\frac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2$. Следовательно, $\frac{dy}{dx} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2$. $\blacktriangle$

909. Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, если $x = a \cos t$, $y = a \sin t$.

910. Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, если $x = e^{-t} \sin t$, $y = e^t \cos t$.

911. Найти $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$, если $\rho = \left(\frac{2}{3} \sqrt{\alpha} + 1 \right) \alpha$, $\theta = \sqrt{\alpha} e^{\sqrt{\alpha}}$.

912. Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, если $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$.

4. Приложения производной к задачам геометрии и механики. Если кривая задана уравнением $y=f(x)$, то $f'(x_0)=\operatorname{tg} \alpha$, где α —угол, образованный с положительным направлением оси Ox касательной к кривой в точке с абсциссой x_0 .

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=y_0'(x-x_0),$$

где y_0' есть значение производной y' при $x=x_0$.

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.

Уравнение нормали имеет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0).$$

Углом между двумя кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0; y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0 . Этот угол находится по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}.$$

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $s=s(t)$, то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени: $v=s'(t_0)$.

913. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = (2/3)x^5 - (1/9)x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x = 1$?

Δ Находим производную $y' = (10/3)x^4 - (1/3)x^2$; при $x = 1$ имеем $y' = 3$, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = 3$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 71^\circ 34'$. $\blacktriangle$

914. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y = x^2 - 3x + 5$, проведенная в точке $M(2; 3)$? Написать уравнение этой касательной.

915. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M(1; -1)$.

Δ Из уравнения кривой найдем производную:

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0, \text{ т. е. } y' = -\frac{x + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

Следовательно, $y'_0 = -\frac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 6(-1)^3} = \frac{1}{4}.$

Уравнение касательной

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1), \text{ или } x - 4y - 5 = 0.$$

Уравнение нормали

$$y + 1 = -4(x - 1), \text{ или } 4x + y - 3 = 0. \quad \blacktriangle$$

916. Найти угол между параболой $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$.

$\triangle$ Решив совместно уравнения парабол, находим точки их пересечения $A(2; 4)$ и $B(-2; 4)$. Продифференцируем уравнения парабол: $y' = -2x$, $y' = 2x$. Найдем угловые коэффициенты касательных к параболом в точке A (т. е. значения производных при $x = 2$): $k_1 = -4$, $k_2 = 4$. Следовательно, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4 + 4}{1 - 16} = -\frac{8}{15}$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(-8/15)$. Так же определяется угол между кривыми в точке B : $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(8/15)$. $\blacktriangle$

917. Найти уравнение нормали к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M(x_0; y_0)$.

918. Составить уравнение касательной к гиперболе $x^2/9 - y^2/8 = 1$, проведенной в точке $M(-9; -8)$.

919. Составить уравнения касательной и нормали к астроице $x = \sqrt[3]{2} \cos^3 t$, $y = \sqrt[3]{2} \sin^3 t$, проведенных в точке, для которой $t = \pi/4$.

920. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, проведенных в точке, для которой $t = \pi/2$.

921. Составить уравнения касательной и нормали к полукубической параболе $x = t^2$, $y = t^3$, проведенных в точке, для которой $t = 2$.

6. Производные высших порядков. Производной второго порядка (второй производной) функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной. Вторая производная обозначается так: y'' , или $\frac{d^2y}{dx^2}$, или $f''(x)$.

Если $s = f(t)$ — закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени $\frac{d^2s}{dt^2}$ есть ускорение этого движения.

Аналогично производная третьего порядка функции $y = f(x)$ есть производная от производной второго порядка: $y''' = (y'')'$.

Вообще, производной n -го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$. Обозначается n -я производная так: $y^{(n)}$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$, или $f^{(n)}(x)$.

Производные высших порядков (вторая, третья и т. д.) вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Если функция задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то производные y'_x , y''_{xx} , ..., вычисляются по формулам

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \quad \text{и т. д.}$$

Производную второго порядка можно вычислить также по формуле

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} x'_t - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

945. $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0,5x + 7$. Найти y' , y'' , y''' , $\dots$

$$\triangle y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - 0,5,$$

$$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2,$$

$$y''' = 60x^2 + 48x - 18,$$

$$y^{IV} = 120x + 48, y^V = 120, y^{VI} = y^{VII} = \dots = 0. \blacktriangle$$

946. $y = \ln x$. Найти $y^{(n)}$.

$$\triangle y' = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

$$y'' = -1 \cdot x^{-2},$$

$$y''' = 1 \cdot 2x^{-3},$$

$$y^{IV} = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4},$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) (-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}. \blacktriangle$$

947. $y = 2^x$. Найти $y^{(n)}$.

$$\triangle y' = 2^x \ln 2,$$

$$y'' = 2^x \ln^2 2,$$

$$y''' = 2^x \ln^3 2,$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = 2^x \ln^n 2.$$

948. $y = \sin x$. Найти $y^{(n)}$.

$$\triangle y' = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin \left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

.....

$$y^{(n)} = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right). \blacktriangle$$

949. Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

$$\triangle y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(a \sin^3 t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}. \blacktriangle$$

Найти производные второго порядка:

950. $y = -\frac{22}{x+5}$. 951. $y = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 3)$.

952. $y = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$.

954. $y = x \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}.$

955. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ 956. $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - t^2}. \end{cases}$

957. Показать, что функция $y = \sin \ln x + \cos \ln x$ удовлетворяет уравнению $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

958. Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

959. При прямолинейном движении точки зависимость пути от времени задана уравнением $s = \sqrt{t}$. Найти ускорение точки в конце 4-й секунды.

Найти производные третьего порядка:

960. $y = \frac{x}{6(x+1)}.$

961. $y = \frac{1}{2} \ln^2 x.$

962. $y = (2x + 3)^3 \sqrt{2x + 3}.$ 963. $y = \operatorname{sh}^2 x.$

● Учесть, что $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$

Найти производные n -го порядка:

964. $y = x^n \sqrt{x}.$ 965. $y = \frac{1}{2x+1}.$ 966. $y = 5 - 3 \cos^2 x.$

967. $y = 2^x + 2^{-x}.$ 968. $y = \frac{ax+b}{cx+d}.$ 969. $y = e^{kx}.$

8. Дифференциалы первого и высших порядков. Дифференциалом (первого порядка) функции $y=f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента. Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента: $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента:

$$dy = y' dx.$$

Геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке $M(x; y)$ (рис. 28).

Основные свойства дифференциала

$$1^0. dC = 0, \text{ где } C = \text{const.}$$

$$2^0. d(Cu) = C du.$$

$$3^0. d(u \pm v) = du \pm dv.$$

$$4^0. d(uv) = u dv + v du.$$

$$5^0. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

$$6^0. df(u) = f'(u) du.$$

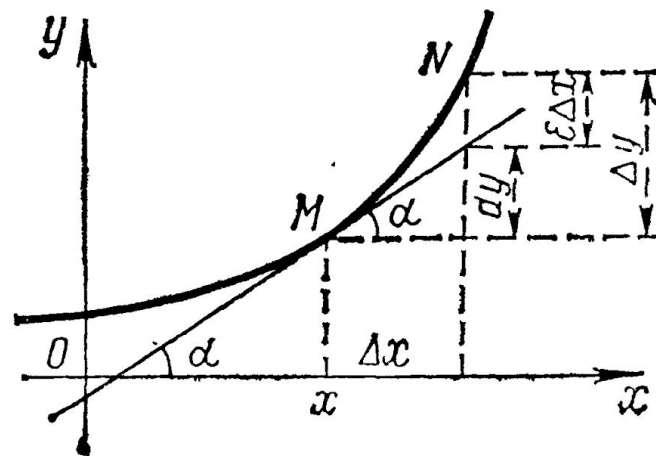


Рис. 28

Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то $\Delta y \approx dy$ и

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x.$$

Таким образом, дифференциал функции может применяться для приближенных вычислений.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = d(dy)$.

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка: $d^3y = d(d^2y)$.

Вообще, $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

Если $y = f(x)$ и x — независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам

$$d^2y = y'' (dx)^2, \quad d^3y = y''' (dx)^3, \quad \dots, \quad d^n y = y^{(n)} (dx)^n.$$

975. Найти дифференциал функции $y = \operatorname{arctg} x$.

$$\triangle dy = (\operatorname{arctg} x)' \cdot dx = \frac{dx}{1+x^2} \cdot \blacktriangle$$

976. Найти дифференциал функции $s = e^{t^3}$.

$$\triangle ds = e^{t^3} \cdot 3t^2 dt \cdot \blacktriangle$$

977. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = (2x - 3)^3$.

$$\begin{aligned} \triangle dy &= 3(2x - 3)^2 \cdot 2dx = 6(2x - 3)^2 dx, \\ d^2y &= 12(2x - 3) \cdot 2dx^2 = 24(2x - 3) dx^2, \\ d^3y &= 24 \cdot 2dx^3 = 48 dx^3. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

978. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $v = e^{2t}$.

$$\triangle dv = 2e^{2t} dt, \quad d^2v = 4e^{2t} \cdot dt^2 \cdot \blacktriangle$$

979. Сравнить приращение и дифференциал функции $y = 2x^3 + 5x^2$.

△ Находим

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 2x^3 - 5x^2 = (6x^2 + 10x)\Delta x + (6x + 5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3, \\ dy = (6x^2 + 10x)dx.$$

Разность между приращением Δy и дифференциалом dy есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx , равная $(6x + 5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3$. ▲

980. Вычислить приближенное значение $\arcsin 0,51$.

△ Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Полагая $x = 0,5$, $\Delta x = 0,01$ и применяя формулу $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$, получаем

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,011 = 0,513. \quad \blacktriangle$$

981. Вычислить приближенное значение площади круга, радиус которого равен 3,02 м.

△ Воспользуемся формулой $S = \pi R^2$. Полагая $R = 3$, $\Delta R = 0,02$, имеем

$$\Delta S \approx dS = 2\pi R \cdot \Delta R = 2\pi \cdot 3 \cdot 0,02 = 0,12\pi.$$

Следовательно, приближенное значение площади круга составляет $9\pi + 0,12\pi = 9,12\pi \approx 28,66$ (м²). ▲

Найти дифференциалы функций:

982. $y = \frac{x}{2} \sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2} \arcsin \frac{x}{7}$. 983. $x = \frac{1}{12} \ln \frac{x-6}{x+6}$.

984. $y = 2 \ln \operatorname{ch} (x/2)$.

985. $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$

986. Найти dy , d^2y , d^3y , если $y = x (\ln x - 1)$.

987. Найти d^2y , если $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 4})$.

988. Сравнить приращение и дифференциал функции $y = 1/x$.

989. Вычислить Δy и dy для функции $y = x^2 - 2x$ при $x = 3$ и $\Delta x = 0,01$.

990. Найти приближенное значение объема шара радиуса 2,01 м.

991. Найти приближенное значение x из уравнения $13 \sin x - 15 \cos x = 0$.

Найти приближенное значение:

992. $\operatorname{arctg} 1,05$. 993. $\operatorname{tg} 46^\circ$.

994. $\ln \operatorname{tg} 47^\circ 15'$. 995. $\sqrt[4]{15,8}$.

Алгоритм исследования функции и построения ее графика

1. Находим область определения ($D(f)$) функции .

2. Если область определения функции симметрична относительно нуля (то есть для любого значения из $D(f)$ значение также принадлежит области определения, то **проверяем функцию на четность**.

Если $f(-x) = f(x)$ то функция **четная**. Для нас важно, что **график четной функции симметричен относительно оси OY**.

Если $f(-x) = -f(x)$, то функция **нечетная**. График **нечетной функции симметричен относительно начала координат**.

Если функция является четной или нечетной, то мы можем построить часть ее графика для, а затем соответствующим образом отразить ее.

3. Находим точки пересечения графика с осями координат.

Находим нули функции - это точки пересечения графика функции с осью абсцисс (OX).

Для этого мы решаем уравнение $f(x) = 0$.

Корни этого уравнения являются ***абсциссами точек пересечения графика функции с осью OX.***

Находим точку пересечения графика функции с осью ординат (OY). Для этого ищем значение функции при $x = 0$.

4. Находим промежутки знакопостоянства функции, то есть промежутки, на которых функция сохраняет знак. Это нам потребуется для контроля правильности построения графика.

Чтобы найти промежутки знакопостоянства функции, нам нужно решить неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

5. Находим асимптоты графика функции.

- Как найти асимптоты

<https://ege-ok.ru/2013/11/12/asimptoty-grafika-funktsii/>

6. Если функция периодическая, то **находим период функции.**

7. Исследуем функцию с помощью производной: **находим промежутки возрастания и убывания функции, а также точки максимума и минимума.**

Для этого мы следуем привычному алгоритму.

а) Находим производную $f'(x)$

б) Приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения $f'(x) = 0$ - это стационарные точки.

в) Находим промежутки знакопостоянства производной. Промежутки, на которых **производная положительна**, являются промежутками **возрастания** функции.

Промежутки, на которых **производная отрицательна**, являются промежутками **убывания** функции.

Точки, в которых производная меняет знак с плюса на минус, являются точками максимума.

Точки, в которых производная меняет знак с минуса на плюс, являются точками минимума.

- **8. Последний этап- точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости.**
- Подробнее о том, *как находить точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости* читайте <https://ege-ok.ru/2013/11/15/tochki-peregiba-i-promezhutki-vyipuklosti-i-vognutosti-grafika-funktsii/> .

Итак, давайте, для примера, исследуем функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ и построим ее график.

1. Найдем $D(y)$.

$$x^2 - 3 \neq 0$$

$$x \neq \pm \sqrt{3}$$

Сразу отметим, что при $x = \pm \sqrt{3}$ знаменатель дроби равен нулю, следовательно, прямые $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$.

2. Исследуем функцию на четность. Область определения функции симметрична относительно нуля (мы выкололи две симметричные точки: $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$)

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 3} = \frac{-x^3}{x^2 - 3} = -f(x)$$

Получили, что $f(-x) = -f(x)$, следовательно, функция $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ - **нечетная**, и график функции **симметричен относительно начала координат**.

3. Найдем точки пересечения с осями координат.

а) Точки пересечения с осью OX ($y=0$)

$$\frac{x^3}{x^2 - 3} = 0$$

$$x = 0$$

б) Точка пересечения с осью OY ($x=0$)

$$y = \frac{0}{0-3} = 0$$

График нашей функции проходит через начало координат.

4. Найдем промежутки знакопостоянства.

Решим неравенство $\frac{x^3}{x^2-3} > 0$

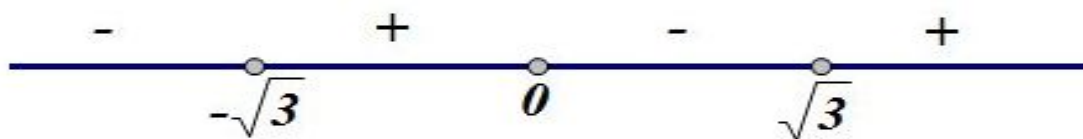
Воспользуемся **методом интервалов**.

Найдем корни числителя и знаменателя, нанесем их на числовую ось и расставим знаки:

Корень числителя: $x=0$

Корни знаменателя: $x=\sqrt{3}$; $x=-\sqrt{3}$

Расставим знаки:



Итак, $f(x) > 0$ при $x \in \left(-\sqrt{3}; 0\right)$ и $x \in \left(\sqrt{3}; \infty\right)$

$f(x) < 0$ при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$ и $x \in \left(0; \sqrt{3}\right)$

5. Найдем асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$.

Вертикальные асимптоты мы уже нашли в п.1, это прямые $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$.

Уравнение горизонтальной асимптоты функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ имеет вид $y = b$, где

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 3}.$$

Степень числителя дроби $\frac{x^3}{x^2 - 3}$ на единицу больше степени знаменателя, поэтому $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 3}$ не существует, и график функции

$y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ не имеет горизонтальной асимптоты.

Попробуем найти наклонную асимптоту.

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

Коэффициенты k и b вычисляются следующим образом:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

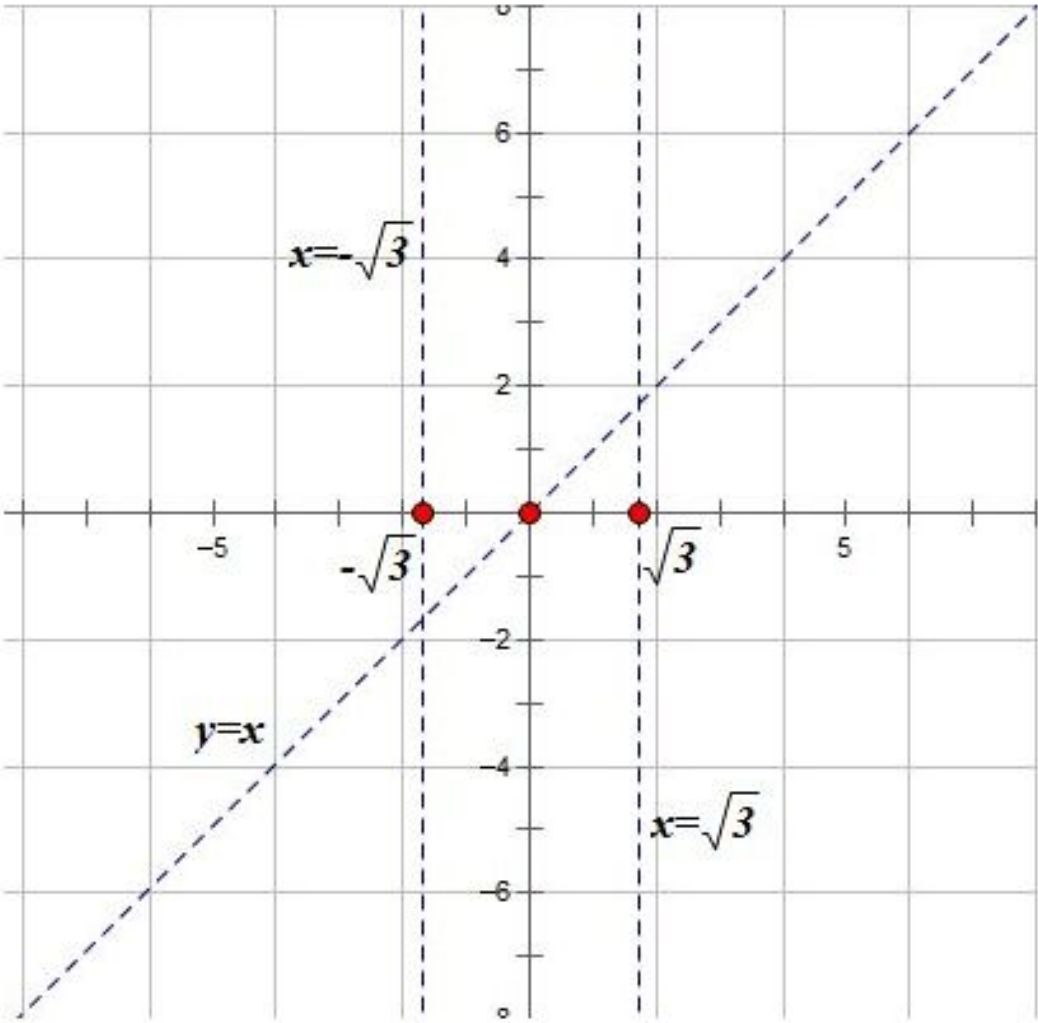
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - kx \right)$$

В нашем случае $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - 3x} = 1$.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 3} - x \right) = \frac{x^3 - x^3 + 3x}{x^2 - 3} = \frac{3x}{x^2 - 3} = 0 \quad (\text{Степень знаменателя на единицу больше степени числителя}).$$

То есть уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = x$.

Нанесем асимптоты на координатную плоскость:



6. Найдем промежутки возрастания-убывания функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ и экстремумы.

а) Найдем производную функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 3} \right)' = \frac{3x^2(x^2 - 3) - x^3(2x)}{(x^2 - 3)^2} = \frac{3x^4 - 9x^2 - 2x^4}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2}$$

б) Приравняем производную к нулю:

$$x^4 - 9x^2 = 0$$

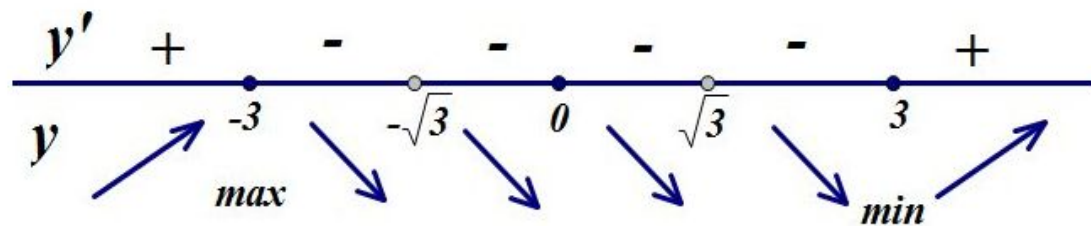
$$x^2(x^2 - 9) = 0$$

$x = 0$ (корень четной кратности); $x = -3$; $x = 3$

Корни знаменателя - $x = \pm\sqrt{3}$ - также корни четной кратности.

В корнях четной кратности производная знак не меняет.

в) Нанесем нули производной и корни ее знаменателя на числовую ось, расставим знаки и найдем точки экстремума и промежутки возрастания и убывания.



Итак, мы нашли промежутки возрастания и убывания.

Найдем значение функции в точках экстремума:

$$x_{\max} = -3$$

$$y_{\max} = y(-3) = \frac{(-3)^3}{(-3)^2 - 3} = \frac{-27}{6} = -4,5$$

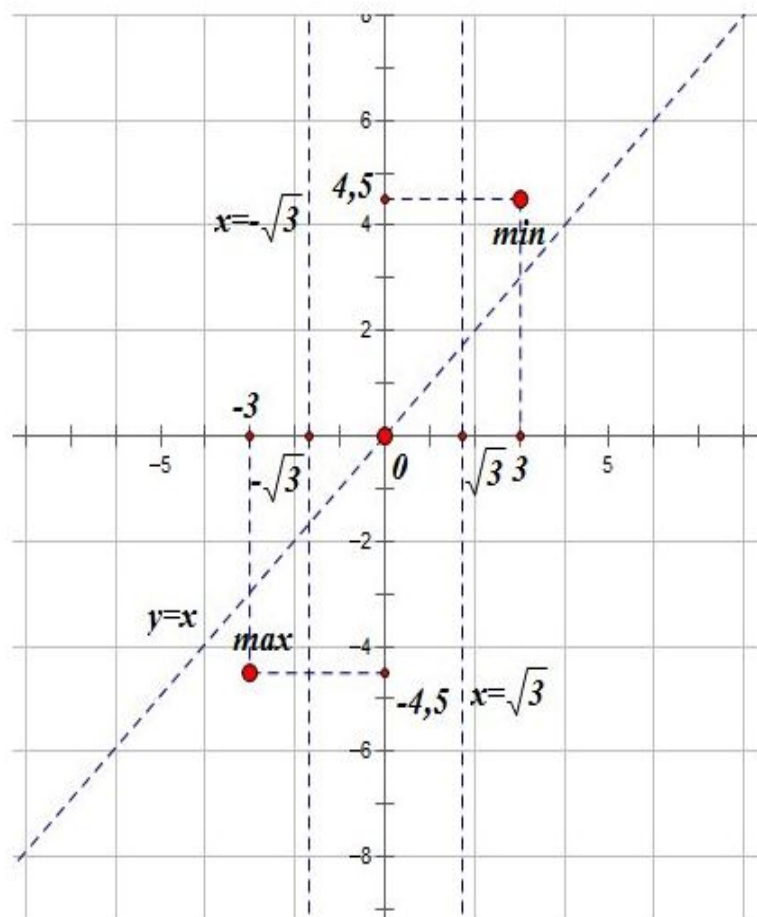
$$x_{\min} = 3$$

$$y_{\min} = y(3) = \frac{(3)^3}{(3)^2 - 3} = \frac{27}{6} = 4,5$$

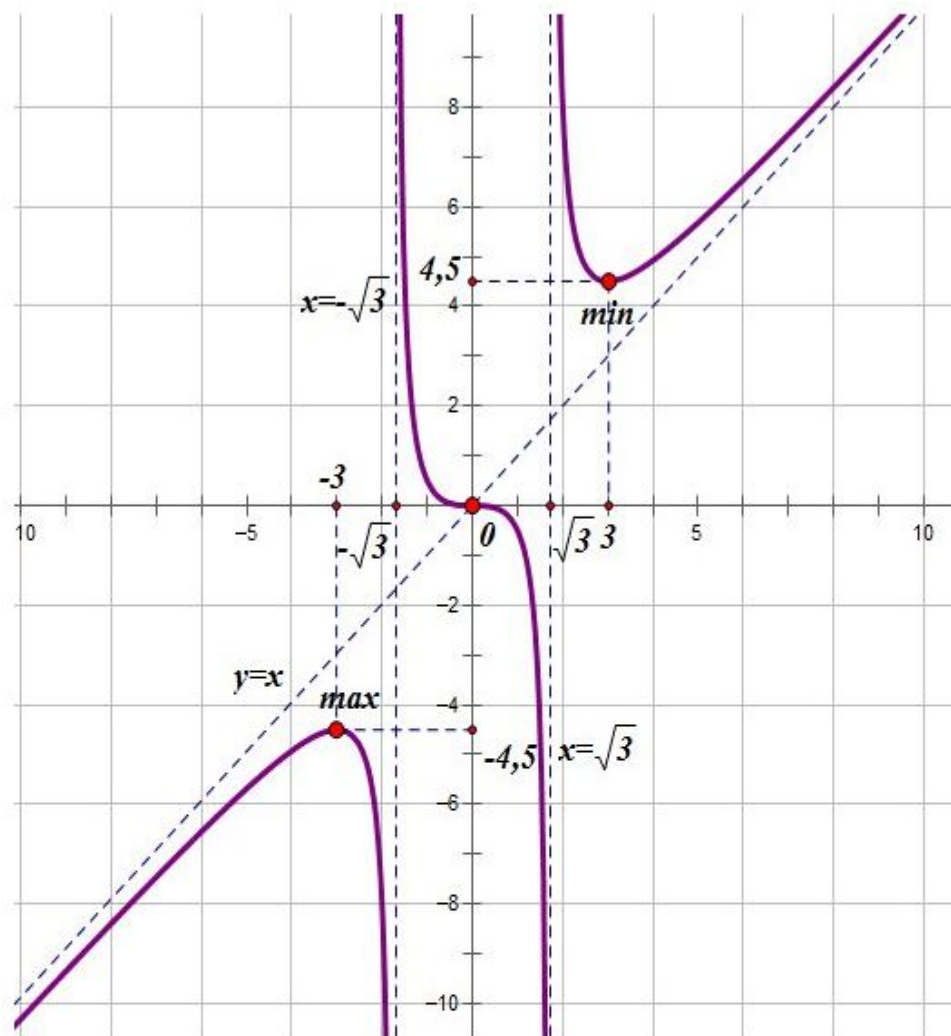
Заметим, что, поскольку функция $\frac{x^3}{x^2 - 3}$ нечетная, и мы нашли, что $y(-3) = -4,5$, мы могли бы сразу написать, что $y(3) = 4,5$

Итак, отметим в нашей координатной плоскости точки минимума и максимума функции и точку пересечения графика функции с осями координат.

На рисунке ниже большими красными кружками обозначены точки, через которые проходит график функции.



Теперь учтем промежутки возрастания-убывания и промежутки знакопостоянства функции (п. 4) и построим ее график. **Помним, что график функции не пересекает абсциссы, он лишь приближается к ним!**



После построения графика необходимо еще раз просмотреть все пункты исследования функции и проверить, соответствует ли полученный график всем пунктам.

Если наблюдается какое-то несоответствие, то необходимо повторить исследование и найти причину нестыковки графика и поведения функции.

Задание к зачету

- Провести исследование функции и построить ее график

$$y = \frac{2x^2}{x-3}$$