

Тема урока:

Понятие действительного числа.



Числовые множества

Обозначение

Название множества

- N Множество натуральных чисел
- Z Множество целых чисел
- $Q=m/n$ Множество рациональных чисел
- $I=R/Q$ Множество иррациональных чисел
- R Множество вещественных чисел



Множество натуральных чисел

- Натуральные числа - это числа счета.
- $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.
- Заметим, что множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения, т.е. сложение и умножение выполняются всегда, а вычитание и деление в общем случае не выполняются

$$\forall n, m \in N \Rightarrow \begin{cases} n + m \\ n \cdot m \end{cases} \in N$$



Множество целых чисел.

- Введем в рассмотрение новые числа:
 - 1) число 0 (ноль),
 - 2) число $(-n)$, противоположное натуральному n .

При этом полагаем: $n + (-n) = (-n) + n = 0$,
 $-(-n) = n$.

Тогда множество целых чисел можно записать так:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Заметим также, что:

Это множество замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, т.е.

Из множества целых чисел выделим два подмножества:

1) множество четных чисел

$$2k, k \in \mathbb{Z}$$

2) множество нечетных чисел

$$2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$



Множество рациональных чисел.

- Множество рациональных чисел можно представить в виде: $Q = \left\{ \frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z \right\}$

В частности, $\frac{m}{1} = m \in Z$ Таким образом, $Z \subset Q$

Множество рациональных чисел замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления (кроме случая деления на 0).

$$\forall p, q \in Q \Rightarrow \begin{cases} p + q, \\ p \cdot q, \\ p - q, \\ \frac{p}{q}, q \neq 0 \end{cases} \in Q$$



- Но в множестве рациональных чисел нельзя, например, измерить гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами $a = 1, b = 1$.

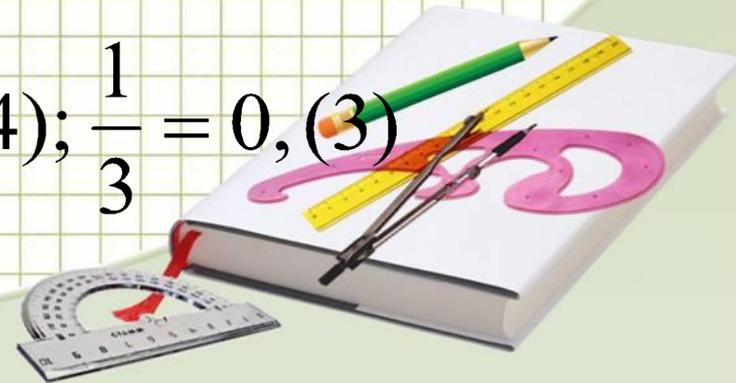
По теореме Пифагора гипотенуза будет равна $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.

Но число не будет рациональным, так как $\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$ ни для каких m и n .

- Нельзя решить уравнение $x^2 - 2 = 0$.
- Нельзя измерить длину окружности и т.д.

Заметим, что всякое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

$$\frac{1}{8} = \frac{5^3}{2^3 \cdot 5^3} = 0,125; \quad \frac{2}{7} = 0,(285714); \quad \frac{1}{3} = 0,(3)$$



Множество иррациональных чисел.

Числа, которые представляются бесконечной непериодической дробью, будем называть иррациональными.

Множество иррациональных чисел обозначим I .

Для иррациональных чисел нет единой формы обозначения. Отметим два иррациональных числа, которые обозначаются буквами – это числа $\sqrt{2}$ и e .



Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a , называется неотрицательное действительное число:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Примеры.

$$|5| = 5$$

$$|-5| = 5$$

$$|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2, \text{ т.к. } \sqrt{5} > 2$$

$$|\sqrt{5} - 3| = 3 - \sqrt{5}, \text{ т.к. } \sqrt{5} < 3$$



Заполнить таблицу:

Данное число

Число противоположное данному

7

-7

-3

$-(-3) = 3$

-2,1

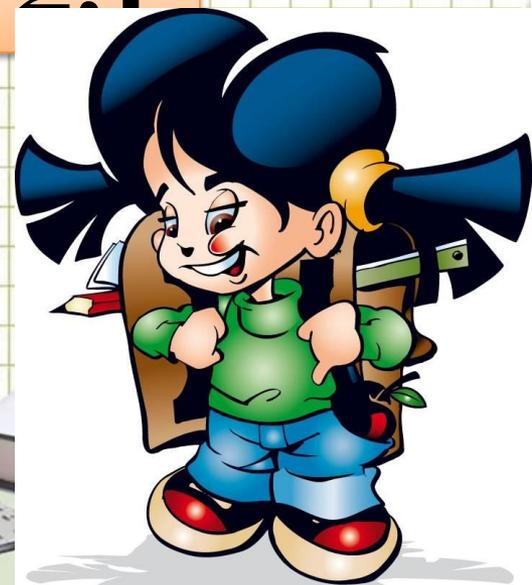
$-(-2,1) = 2,1$

$a + 3$

$-a - 3$

$2a - 7$

$7 - 2a$



Заполнить таблицу:

Данное число

Модуль данного числа

4

4

-4

4

0

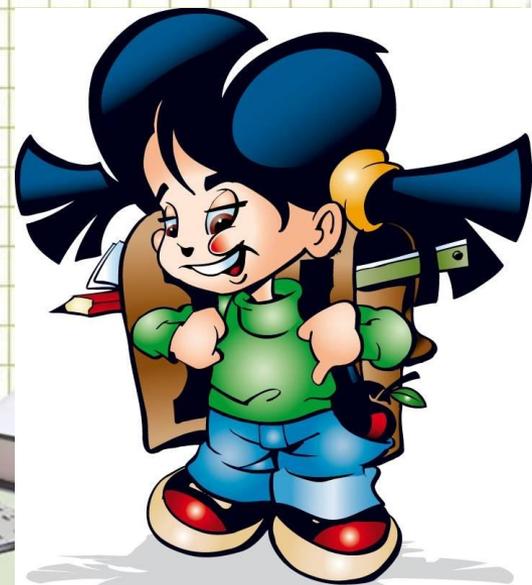
0

-8,7

8,7

a^2

a^2



Заполнить пропуски:

$$1) |a| = \begin{cases} a, & \text{если } \underline{a \geq 0}, \\ -a, & \text{если } \underline{a < 0}; \end{cases}$$

$$2) |m| = \begin{cases} \underline{m}, & \text{если } m \geq 0, \\ \underline{-m}, & \text{если } m < 0. \end{cases}$$



Вычислить устно и записать ответ:

$$1) |5| + |-5| = \underline{10}$$

$$2) |-6| + |6| = \underline{12}$$

$$3) 9 \cdot |5 - 7| = \underline{18}$$

$$4) |10 - 10| \cdot 7 = \underline{0}$$

$$5) -3 \cdot |-4| = \underline{-12}$$

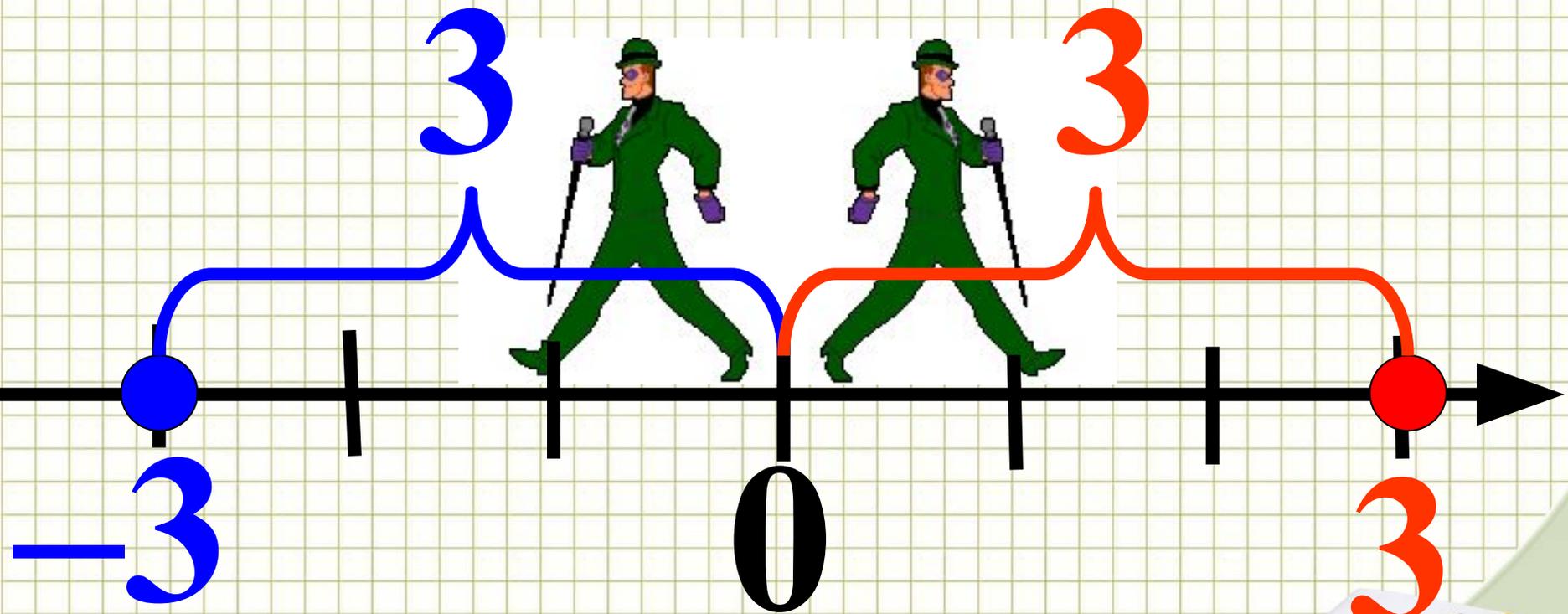
$$5) |-18| : |-3| = \underline{6}$$

Основные свойства модуля

№	свойство	пример
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

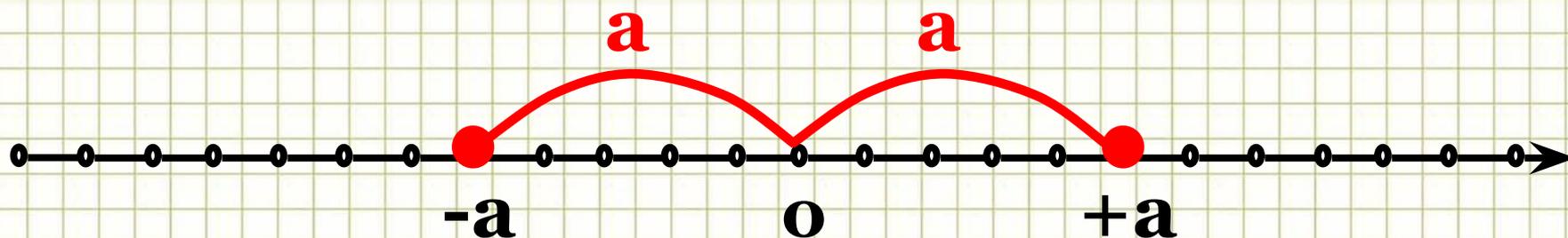


Геометрическое истолкование



Геометрическое истолкование

Модуль действительного числа **a** есть расстояние (в единичных отрезках) от точки с координатой **a** на числовой оси до начала координат.



$$| -a | = a$$

$$| a | = a$$



Пример №1

Упростить выражение

$$1) \left| \sqrt{51} - 7 \right| + \left| \sqrt{51} - 5\sqrt{3} \right| + \left| \sqrt{75} - 11 \right|$$

$$2) \sqrt{\pi^2 - 8\pi + 16}$$

$$3) \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}$$

$$4) \sqrt[4]{(2 - \sqrt{5})^4} + \sqrt[6]{(5 - \sqrt{5})^6}$$



Пример №2

Упростить выражение

$$1) \quad 2 \cdot |3 - \sqrt{11}| - \sqrt{44}$$

$$2) \quad |\sqrt{45} - 4\sqrt{5}| + 3,5 - \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$3) \quad |2\sqrt{7} - \sqrt{63}| - (4 + \sqrt{7})$$

$$4) \quad \frac{8 - 2\sqrt{15}}{|\sqrt{15} - 4|} - 2,3$$



Пример №4

Упростить выражение

$$\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(2-x)^2}, \text{ если } 2 < x < 3$$

$$\sqrt{(x^2-4)^2} + \sqrt{(x^2-9)^2}, \text{ если } -3 < x < -2$$

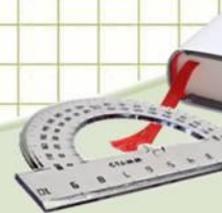
$$\sqrt{(x+5,2)^2} + \sqrt{(x-3,3)^2}, \text{ если } -5 < x \leq 2,9$$

Пример №3

Упростить выражение

$$|x-5| + |x-8,5|,$$

если $5,6 \leq x \leq 8,2$



Пример №5

Упростить выражение

$$2 - \sqrt[6]{(x-1)^2(x+4)^4} \cdot \sqrt[6]{(x+4)^2(x-1)^4},$$

если $x^2 + 3x = 3$

Ответ: 1



Пример №6

Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{(x\sqrt{2} - 3)^2}}{\sqrt{(x\sqrt{32} - 12)^2}}, \text{ если } x = \sqrt{3}$$

Ответ: 0,25



Пример №7

Упростить выражение

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 10x + 25},$$

если $-2 \leq x \leq 5$

Ответ: 7



Пример №8

Упростить выражение

$$\frac{x^2 \sqrt{(x+4)^2 - 16x}}{x-4}, \text{ если } x = \sqrt{7}$$

Ответ: -7



Пример №9

Упростить выражение

$$\frac{x^2 + 1}{x \sqrt{\left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2 + 1}}, \text{ если } x < 0$$

Ответ: -2



Пример №10

Упростить выражение

$$x + \sqrt{\sqrt{(4 - 3,5x)^2} + \sqrt{(0,5x - x^2)^2}},$$

если $x = \sqrt{3} - 1$

Ответ: 2



Пример №11

Упростить выражение

$$\sqrt{\sqrt{(2x + 9)^2} - \sqrt{(x^2 + 4x)^2}} - 2\sqrt{2},$$

если $x = -1,1 - \sqrt{8}$

Ответ: -1,9



Пример №12

Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{x^2 - 4}{2x}\right)^2} + 4 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}}}{x - 2},$$

если $-7 < x < -2,5$

Ответ: -0,5

