

Действительные числа

Приближенные дроби;
Периодические дроби;
Округление дробей;
Иррациональные числа;
Комплексные числа.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Множество $\mathbb{R}$.

Рациональные числа — это целые и дробные числа (обыкновенные дроби, конечные десятичные дроби и бесконечные периодические дроби).

Обыкновенные дроби.

$$\frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{1}{6}, \frac{7}{3}, \frac{4}{4}, \frac{2}{5}, \frac{18}{7}$$

Конечные десятичные дроби.

$$0,45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20};$$

$$1,0125 = 1 \frac{125}{10000} = 1 \frac{1}{80}.$$

Периодические дроби.

$$\frac{1}{3} = 0,333...; \quad \frac{1}{11} = 0,090909...;$$

$$\frac{22}{7} = 3,142857142857142857...;$$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Множество I.

- это бесконечная десятичная непериодическая дробь.

$\sqrt{3} = 1,732050\dots$ - иррац.число,

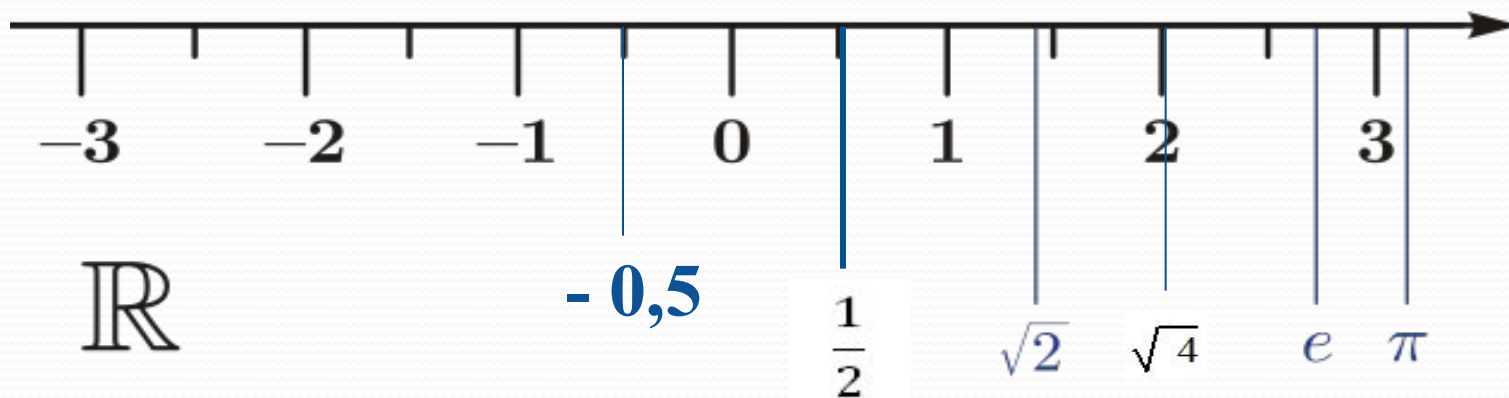
$\pi = 3,141592\dots$ - иррац.число.

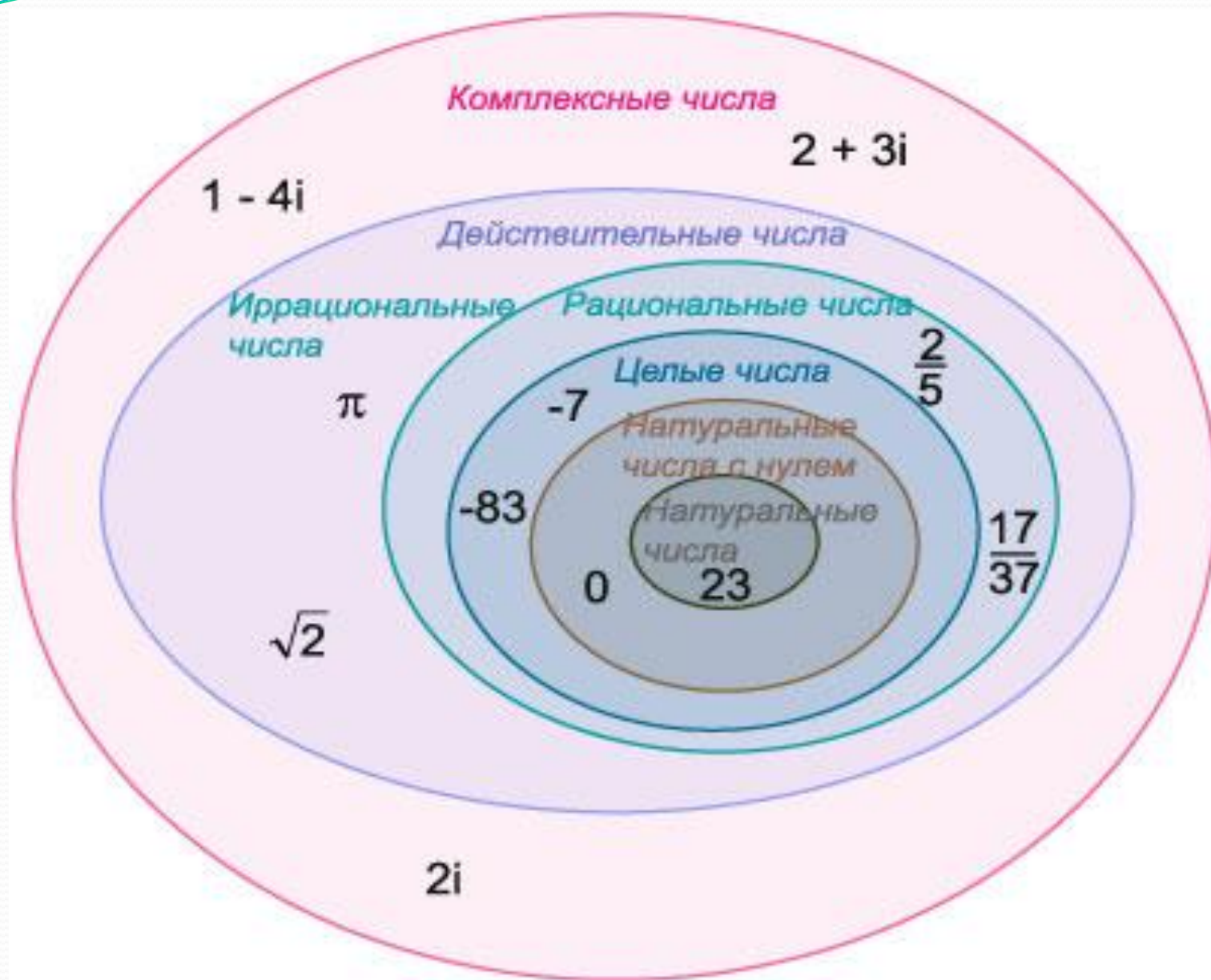
ratio – разум

рациональное число – разумное число

иррациональное число – неразумное число

РАСПОЛОЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ





КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

$$5 + \sqrt{-3}$$

ОШИБОЧНЫЙ ВАРИАНТ

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{(-3) \cdot (-3)} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$i^2 = -1$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{-1 * 3} = \sqrt{i^2 * 3} = i\sqrt{3}$$

$$5 + i\sqrt{3}$$

$$(i\sqrt{3}) \cdot (i\sqrt{3}) = (i \cdot \sqrt{3})^2 = i^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = -3.$$

Комплексные числа

Определение 1. Числа вида $a + bi$,

где a и b – действительные числа,

i – мнимая единица,

называются **КОМПЛЕКСНЫМИ**.

a – действительная часть комплексного числа,

bi – мнимая часть комплексного числа,

b – коэффициентом при мнимой части.

ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Сложение	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Вычитание	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Умножение	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
Деление	$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i; \quad c^2 + d^2 \neq 0$
Возведение в степень числа i	$i^{4m} = 1, i^{4m+1} = i, i^{4m+2} = -1, i^{4m+3} = -i.$

Пример 1.

а) Найти $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1^2 , $\frac{z_1}{z_2}$, если

$$z_1 = 4 - 5i, z_2 = 2 + 3i.$$

Решение:

$$z_1 + z_2 = 4 - 5i + 2 + 3i = (4 + 2) + (-5 + 3)i = 6 - 2i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 5i) \cdot (2 + 3i) = 8 + 12i - 10i - 15i^2 = 8 + 2i - 15(-1) = 23 + 2i$$

$$z_1^2 = (4 - 5i)^2 = 16 - 40i + 25i^2 = 16 - 40i - 25 = -9 - 40i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - 5i}{2 + 3i} = \frac{(4 - 5i) \cdot (2 - 3i)}{(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)} = \frac{8 - 10i - 12i + 15i^2}{2^2 - (3i)^2} = \frac{8 - 22i - 15}{4 + 9} =$$

$$= \frac{-7 - 22i}{13} = -\frac{7}{13} - \frac{22}{13}i$$

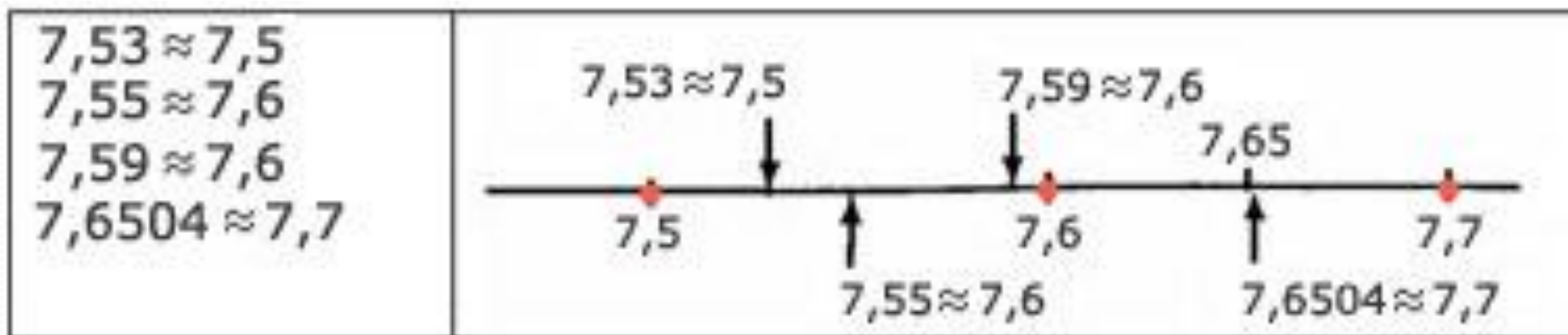
Приближенные вычисления.

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,50, \quad \frac{1}{4} = 0,25, \quad \frac{1}{7} \approx 0,14,$$

$$\frac{1}{3} \approx 0,33, \quad \frac{3}{4} = 0,75, \quad \frac{2}{7} \approx 0,29,$$

$$\frac{2}{3} \approx 0,67, \quad \frac{5}{6} \approx 0,83, \quad \frac{3}{7} \approx 0,43.$$

Округление дроби.



Если – 5,6,7,8,9, то $\uparrow$ на 1.

Если – 0,1,2,3,4, то не изменяем.

Округлите дроби:

а) до десятых:

2,781

3,1423

203,962

80,46

Округлите дроби:

б) до сотых:

0,07268

1,35506

10,081

76,544

4,455

Абсолютная погрешность

$$\begin{array}{ccc} & a \approx x & \\ \nearrow \text{точно} & & \nwarrow \text{приблизленно} \\ \epsilon & & \epsilon \end{array}$$

Абсолютная погрешность Δ округления $a \approx x$ — это модуль разности между точным и приближенным значением числа:

$$\Delta = |a - x|$$

Пример. $\pi = 3,1415926\dots$

$$\pi \approx 3,14$$

$$\Delta = |3,1415926\dots - 3,14| = 0,0015926\dots$$

Относительная погрешность

Относительная погрешность округления $a \approx x$ – это отношение абсолютной погрешности к модулю числа:

$$\omega = \frac{\Delta}{|x|} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\Delta}{|a|}$$

Относительную погрешность удобно выражать в процентах. Для этого ее нужно умножить на 100%.

№ 1. При измерении длины и диаметра провода получили:

$$l = 50 \pm 0,1 \text{ мм}$$

$$d = 2 \pm 0,1 \text{ мм}$$

Вычислить относительные погрешности измерений.
Что измерено точнее?

$$E_l = \frac{0,1}{50} = 0,002 = 0,2\% \quad - \text{точнее}$$

$$E_d = \frac{0,1}{2} = 0,05 = 5\%$$

№ 2. Вычислить, округлить до сотых и сравнить, какое округление точнее: $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{30}$

$$1) \frac{1}{3} = 0,33333... \approx 0,33$$

$$\Delta_1 = 0,33333... - 0,33 = 0,00333... \leq 0,004 = h_1$$

$$E_1 = \frac{0,004}{0,33} = 0,012... \leq 0,02$$

$$2) \sqrt{30} = 5,4772255... \approx 5,48$$

$$\Delta_2 = 5,4772255... - 5,48 = 0,0027745... \leq 0,003 = h_2$$

$$E_2 = \frac{0,003}{5,48} = 0,000547... \leq 0,0006$$

$E_1 < E_2 \Rightarrow$ 2-е округление точнее

№ 3. При измерении длины одного отрезка с точностью до 5 м получено 23,37 км, а при измерении длины другого отрезка с точностью до 0,5 см получено 3 м. Какое измерение по своему качеству лучше?

**КО ВСЕМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ
ПРИМЕНИМЫ
ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО
УМНОЖЕНИЯ**

1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
4	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
7	$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$