

Электронный учебник по математике

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тригономётрия (от греч. *τρίγωνο* (треугольник)
и греч. *μετρέιν* (измерять),
то есть измерение треугольников) — раздел
математики,

в котором изучаются тригонометрические
функции и их приложения к геометрии.

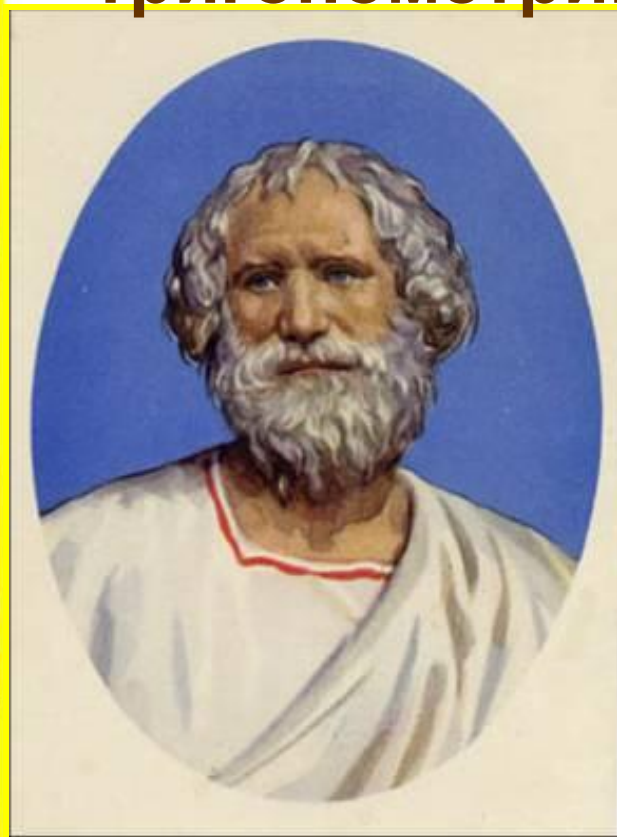
Данный термин впервые появился в 1595 г. как
название книги немецкого математика
Бартоломеуса Питискуса (*Bartholomäus Pitiscus*,
1561—1613),

а сама наука ещё в глубокой древности

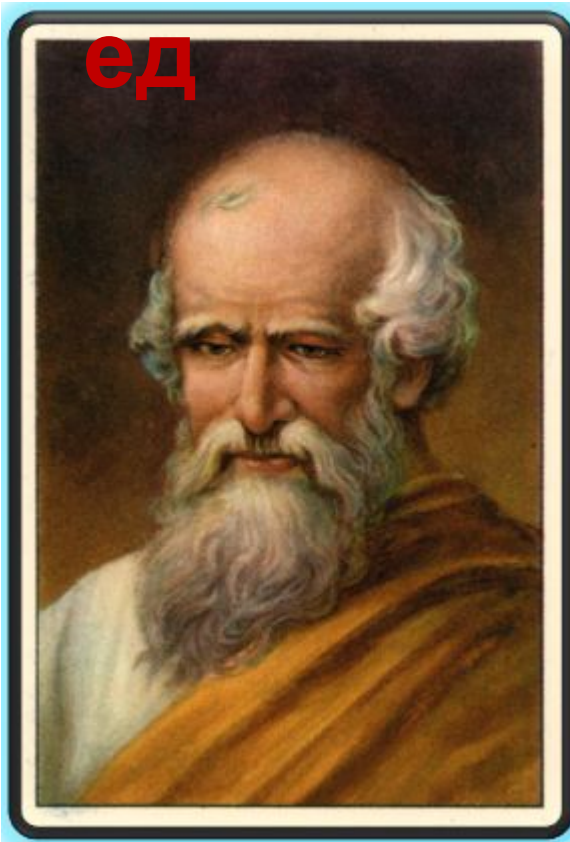
использовалась для расчётов в астрономии

Начало тригонометрии

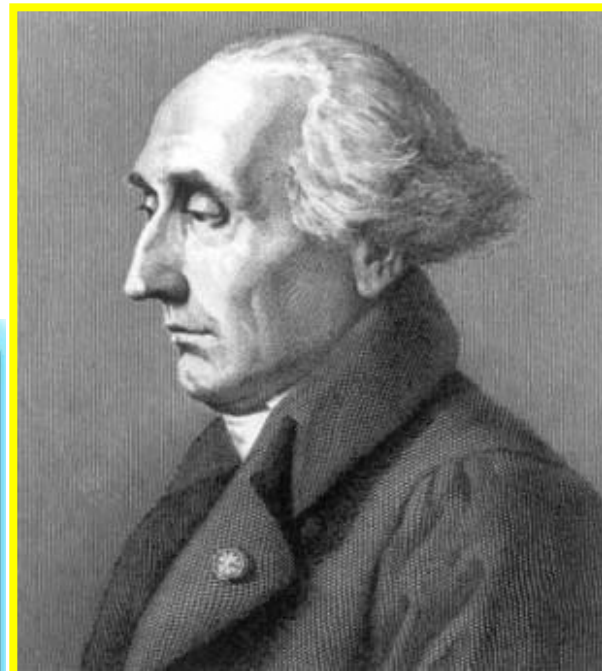
**Эти ученые внесли свой вклад в развитие
тригонометрии**



**Фал
ес**



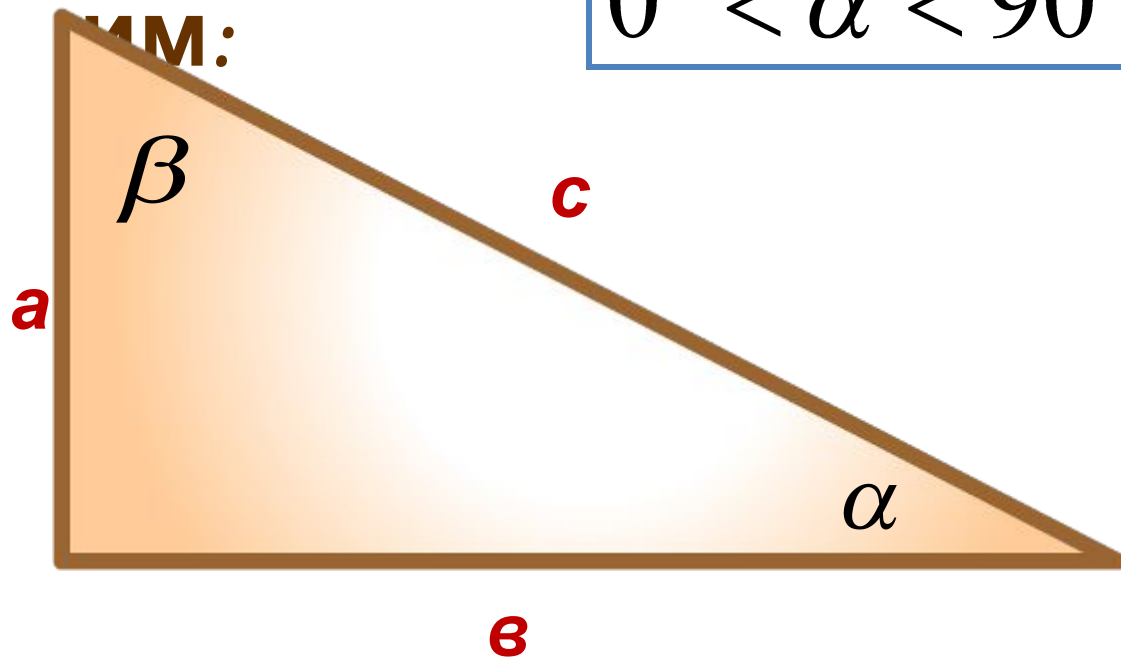
**Архим
ед**



**Жозеф
Луи
Лагранж**

Вспомни

Нам:



$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

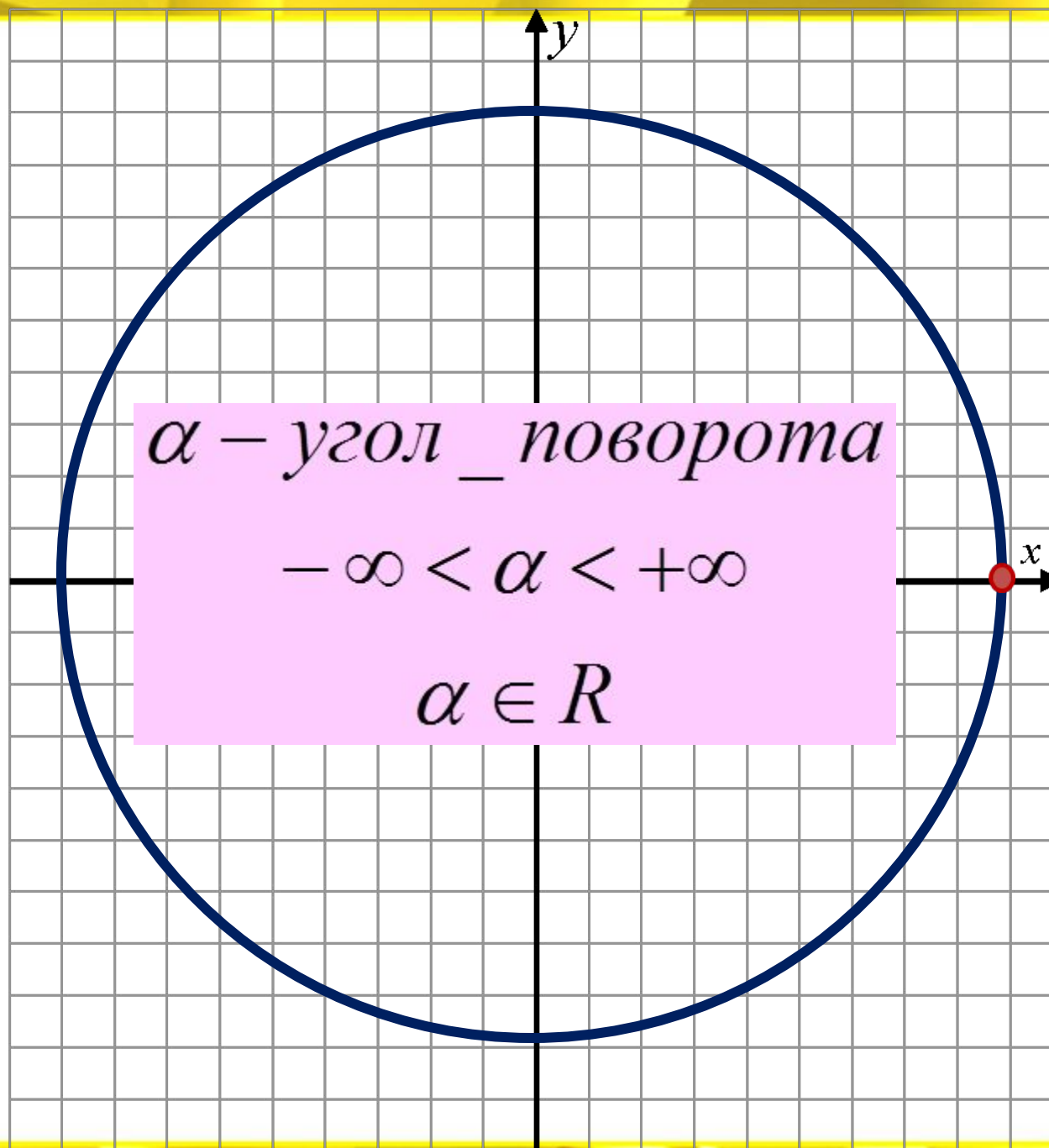
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

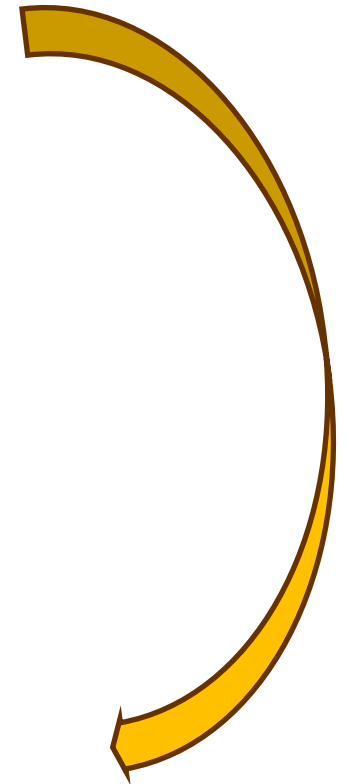
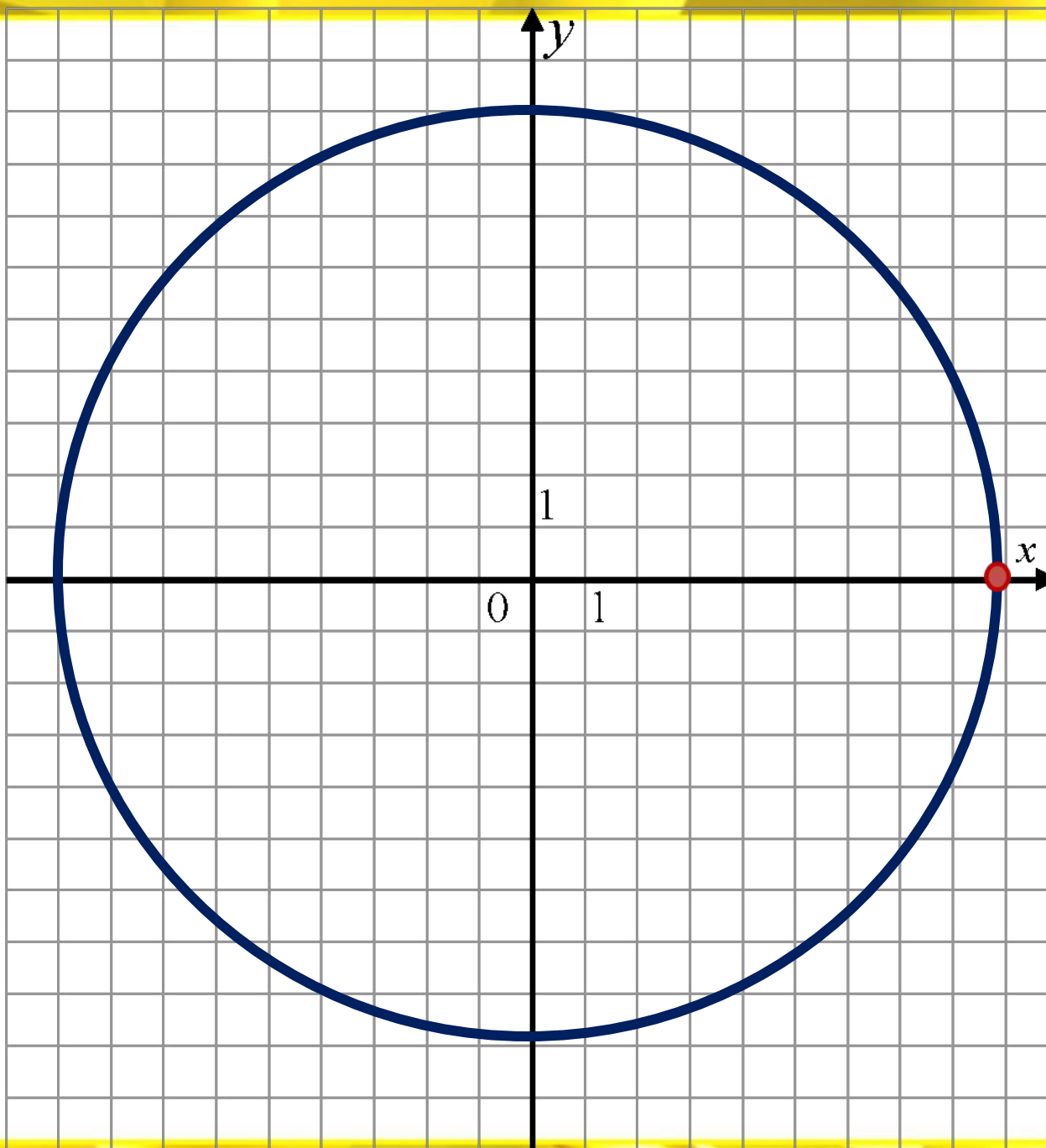
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к гипотенузе.

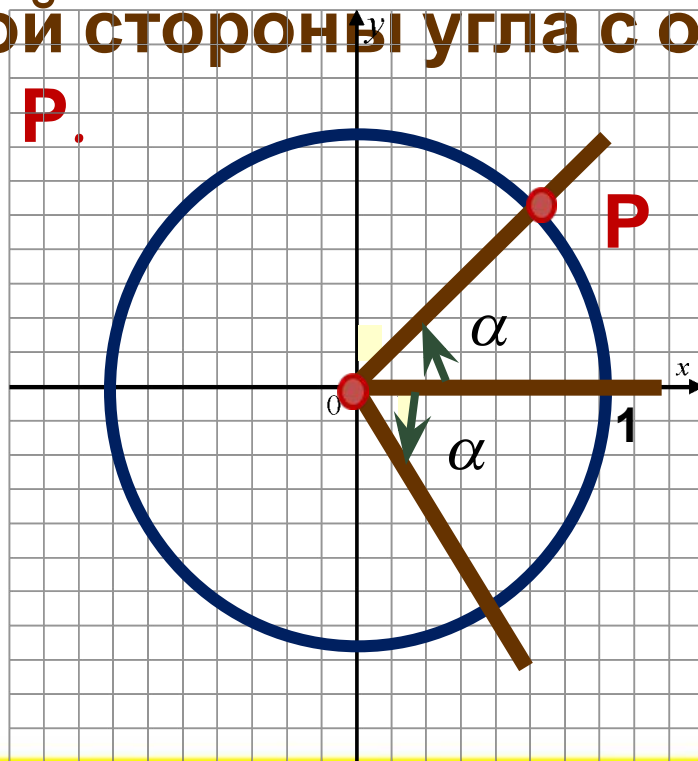
Косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенс — отношение противолежащего





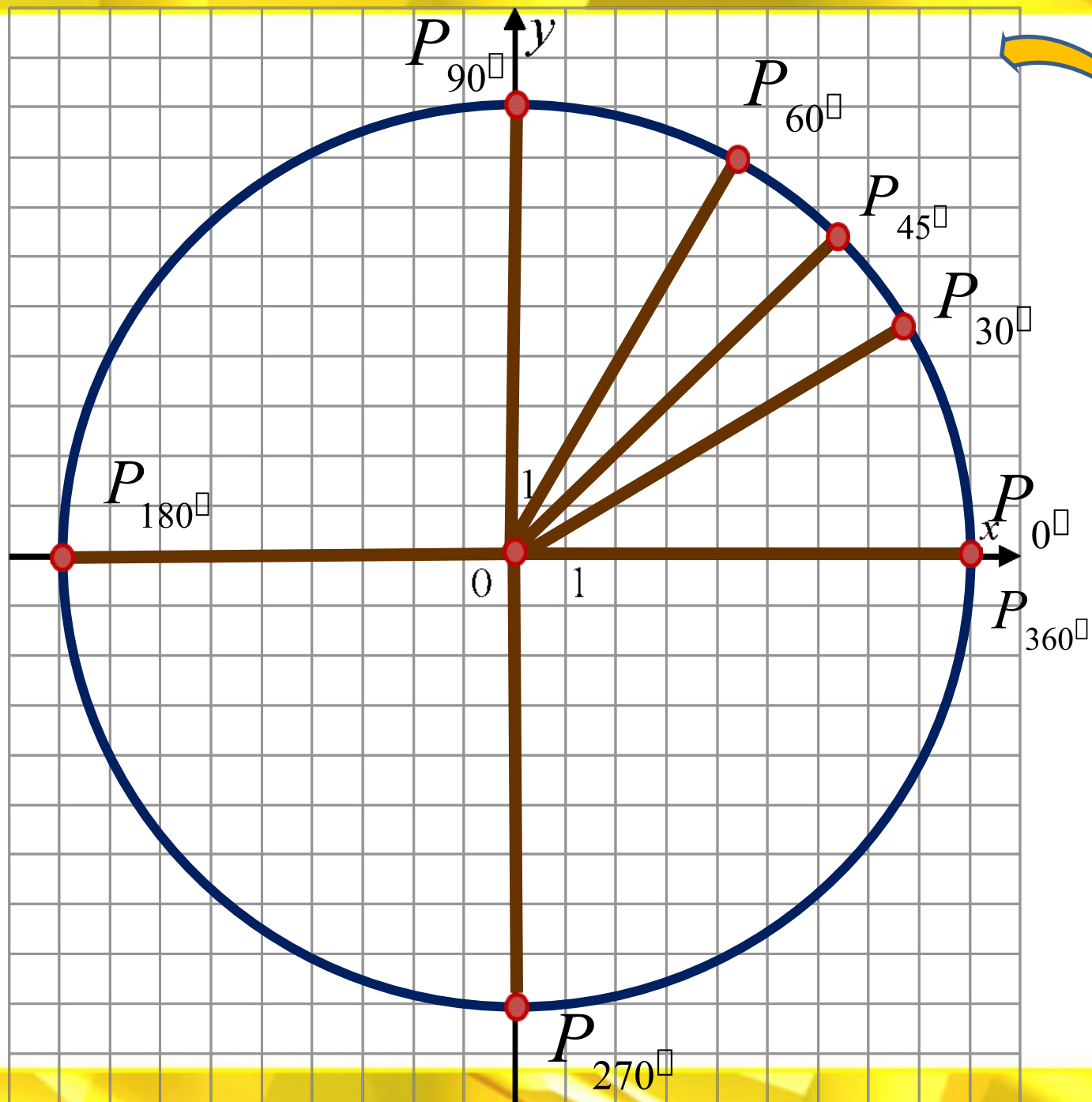
Рассмотрим в прямоугольной системе координат окружность единичного радиуса и отложим от горизонтальной оси угол (если величина угла положительна, то откладываем против часовой стрелки, иначе по часовой стрелке). Точку пересечения построенной стороны угла с окружностью обозначим **P**.

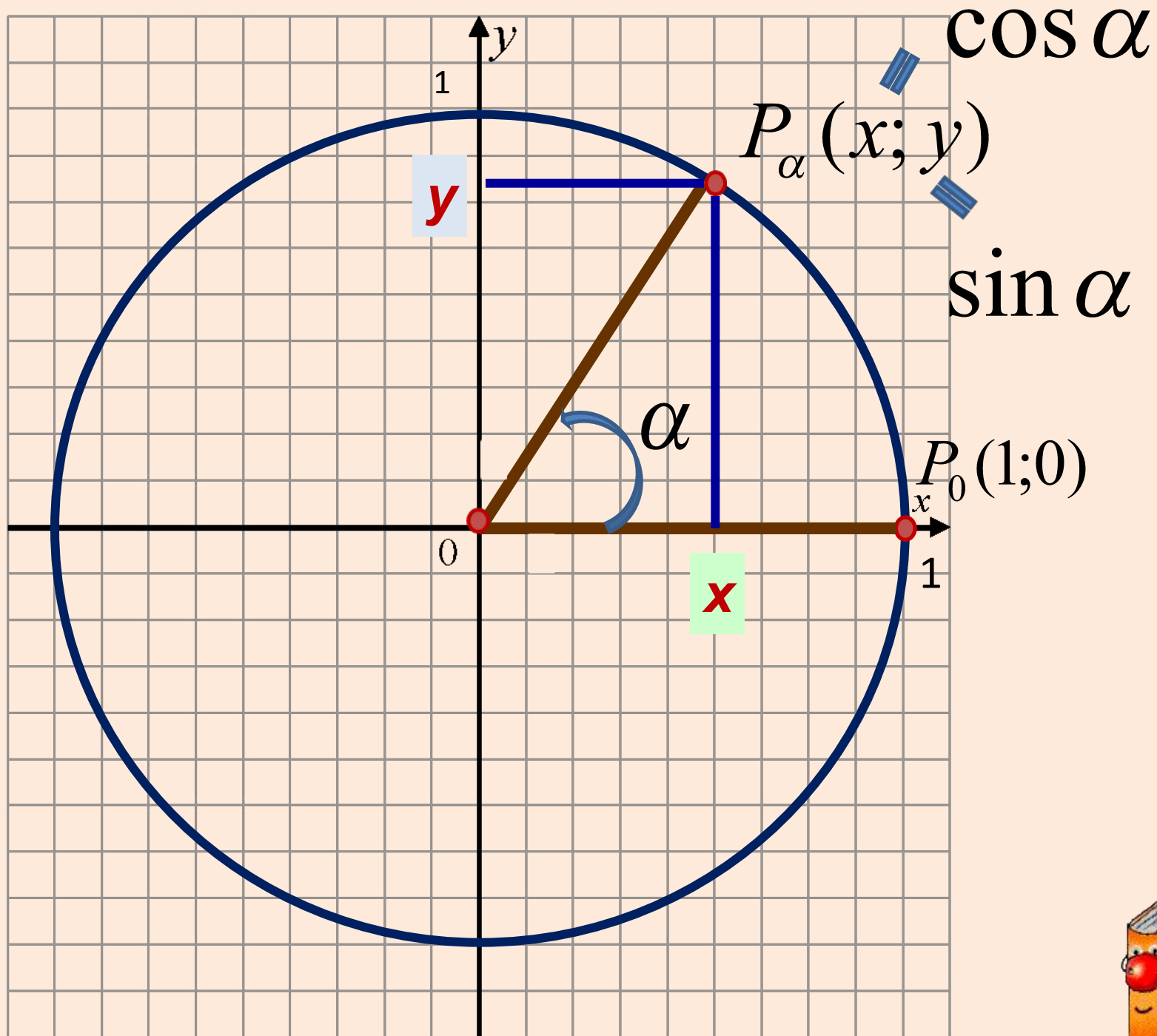


$$\alpha > 0$$

$$\alpha < 0$$







Синус угла определяется как

$$\sin \alpha = \frac{y}{r_\alpha}$$

ордината точки

$$\cos \alpha = \frac{x}{r_\alpha}$$

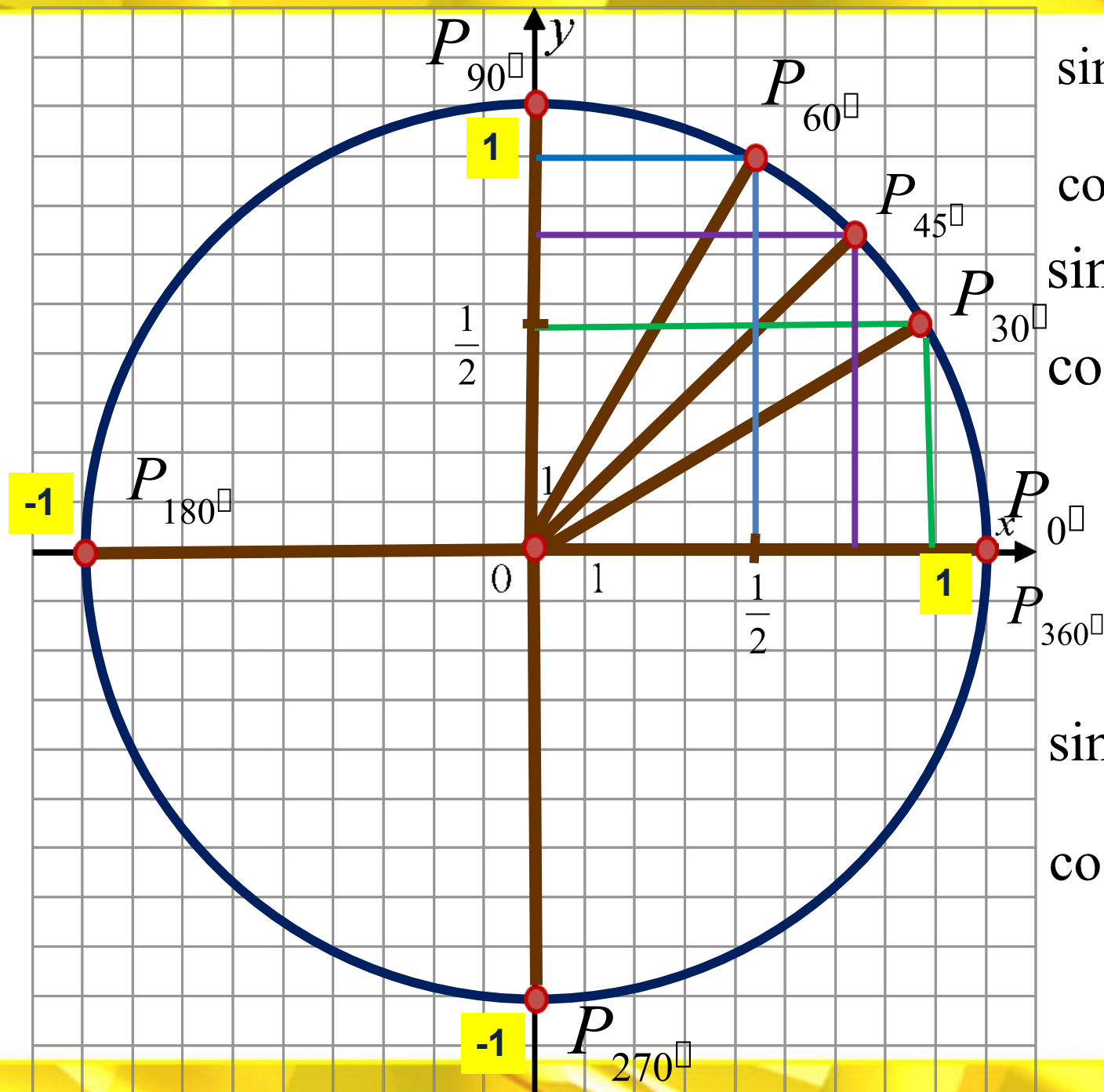
Косинус — абсцисса точки

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

Тангенс — отношение ординаты к абсциссе

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

Котангенс — отношение абсциссы к



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

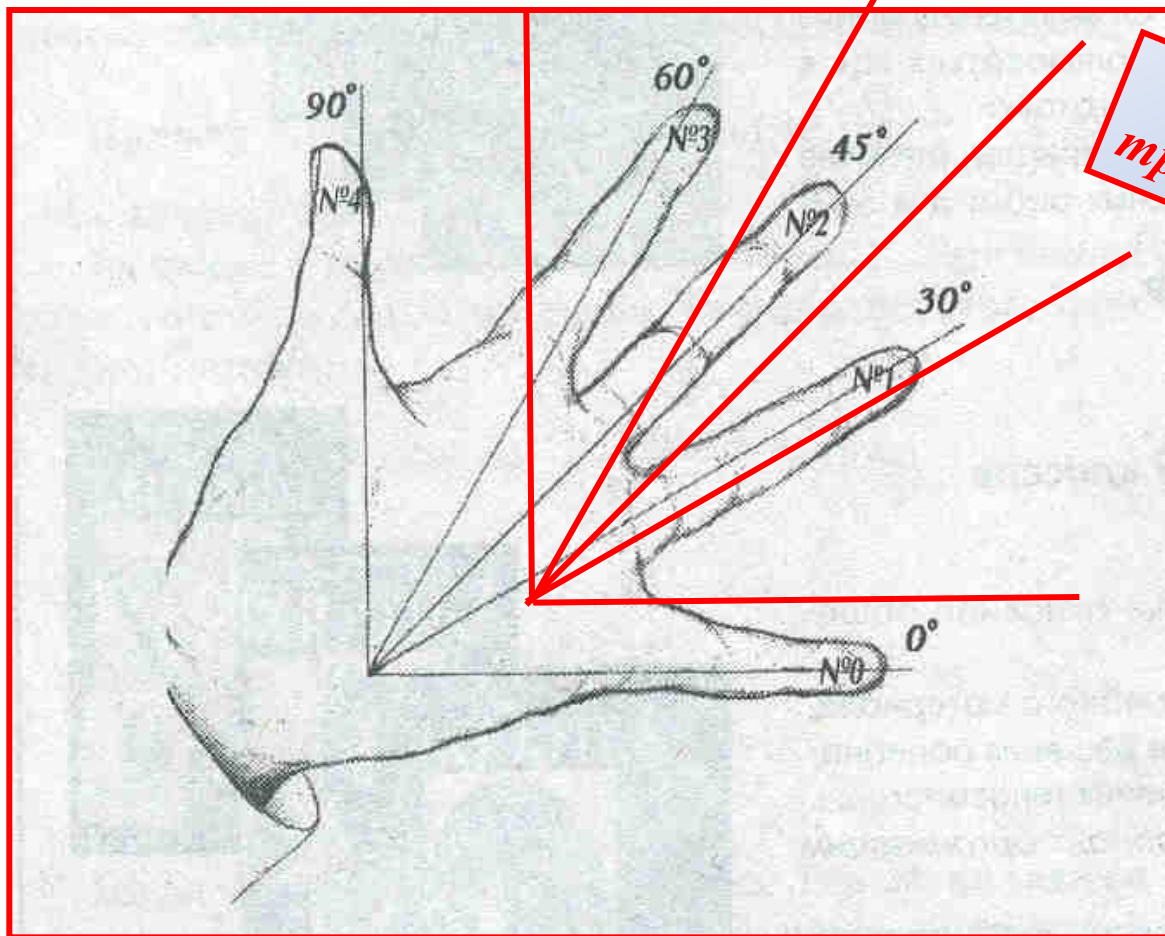
$$\cos 30^\circ \approx 0.9$$

$$\sin 45^\circ \approx 0.7$$

$$\cos 45^\circ \approx 0.7$$

$$\sin 60^\circ \approx 0.9$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$



*Это интересно
тригонометрия на ладони*



№0 Мизинец	0°
№1 Безымянный	30°
№2 Средний	45°
№3 Указательный	60°
№4 Большой	90°

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

Значение синуса

№ пальца	Угол α	
0	0	$\sin 0^\circ = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
1	30	$\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$
2	45	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3	60	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4	90	$\sin 90^\circ = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

Единицы измерения углов

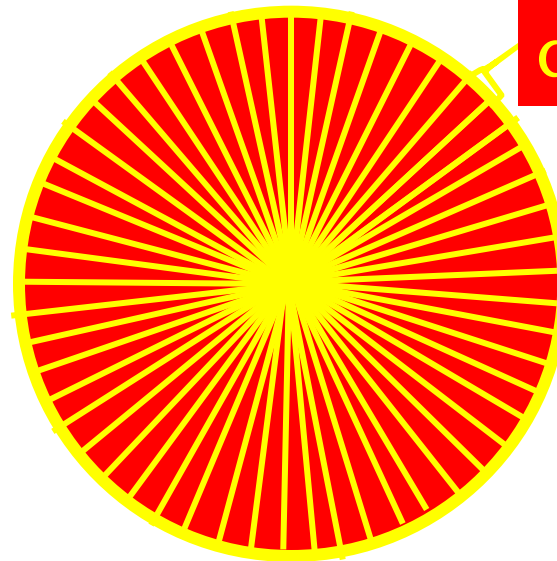
Рadiany

Grady

$$\pi \text{ радиан} = 180^\circ$$



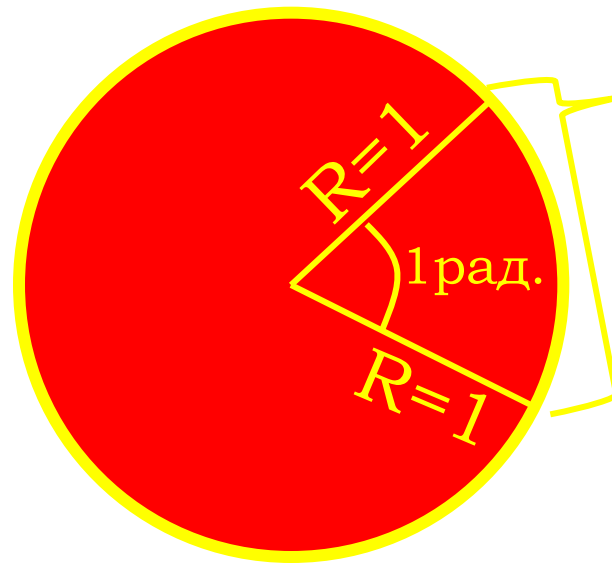
Градусная мера угла



$$\alpha = 1^\circ$$

**1° – цена одного деления
окружности, разделенной на 360
частей**

Радиианная мера угла



$$l=R$$

1 радиан – это величина центрального угла, длина дуги которого равна радиусу

Перевод из градусной меры в радианную:

$$n^{\circ} = \frac{\pi \cdot n^{\circ}}{180^{\circ}} \text{ рад.}$$

Перевод из радианной меры в градусную:

$$n \cdot \pi_{\text{рад.}} = n \cdot 180^{\circ}$$

А теперь примеры!

$$30^\circ =$$

$$\frac{\pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} \text{ рад.}$$

$$= \frac{\pi}{6} \text{ рад.}$$

$$90^\circ =$$

$$\frac{\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} \text{ рад.}$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ рад.}$$

$$135^\circ =$$

$$\frac{\pi \cdot 135^\circ}{180^\circ} \text{ рад.}$$

$$= \frac{3\pi}{4} \text{ рад.}$$

Продолжаем решать примеры

$$\frac{\pi}{3} \text{ рад.} =$$

$$\frac{180^\circ}{3}$$

$$= 60^\circ$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ рад.}$$

$$= \frac{180^\circ}{4}$$

$$= 45^\circ$$

$$\frac{4\pi}{5} \text{ рад.}$$

$$= \frac{4 \cdot 180^\circ}{5}$$

$$= 144^\circ$$

Тренажер №1: переведите градусную меру в радианную .

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$$

*Нужно умножить число градусов на $\pi / 180$
т. е. на величину одного градуса в радианах.*

$$10^{\circ} = \frac{\pi}{18}$$

$$36^{\circ} = \frac{\pi}{5}$$

$$180^{\circ} = \pi$$

$$15^{\circ} = \frac{\pi}{12}$$

$$45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$$

$$270^{\circ} = \frac{3\pi}{2}$$

$$20^{\circ} = \frac{\pi}{9}$$

$$60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$$

$$360^{\circ} = 2\pi$$

$$18^{\circ} = \frac{\pi}{10}$$

$$75^{\circ} = \frac{5\pi}{12}$$

$$135^{\circ} = \frac{3\pi}{4}$$

$$30^{\circ} = \frac{\pi}{6}$$

$$90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$$

$$225^{\circ} = \frac{5\pi}{4}$$

Тренажер №2: переведите радианную меру в градусную .

$$1 \text{ рад} = \frac{180^0}{\pi}$$

*Нужно умножить число радиан на $180^0 / \pi$
т. е. на величину одного радиана в градусах.*

$$\pi/12 = 15^0$$

$$\pi/7 = 180^0/7$$

$$\pi/18 = 10^0$$

$$\pi/2 = 90^0$$

$$\pi/8 = 45^0/2$$

$$\pi/20 = 9^0$$

$$\pi/3 = 60^0$$

$$\pi/9 = 20^0$$

$$\pi/30 = 6^0$$

$$\pi/4 = 45^0$$

$$\pi/10 = 18^0$$

$$2\pi/3 = 120^0$$

$$\pi/5 = 36^0$$

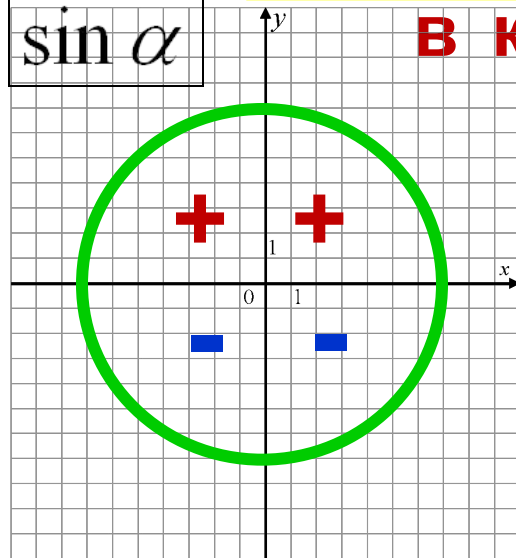
$$\pi/15 = 12^0$$

$$3\pi/4 = 135^0$$

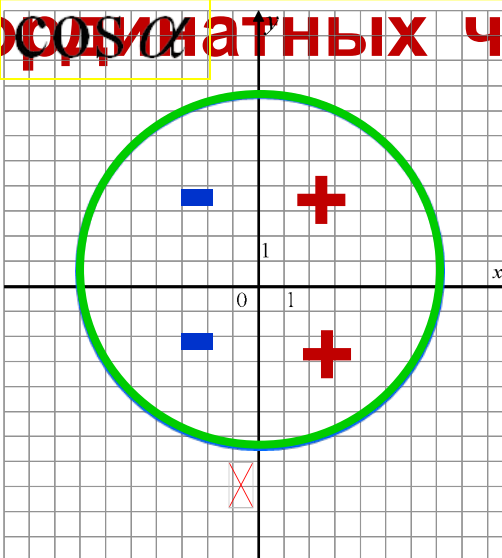
Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса

В координатных четвертях

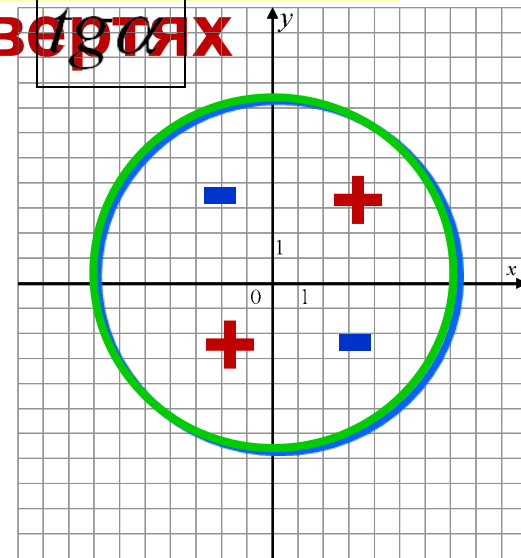
$\sin \alpha$



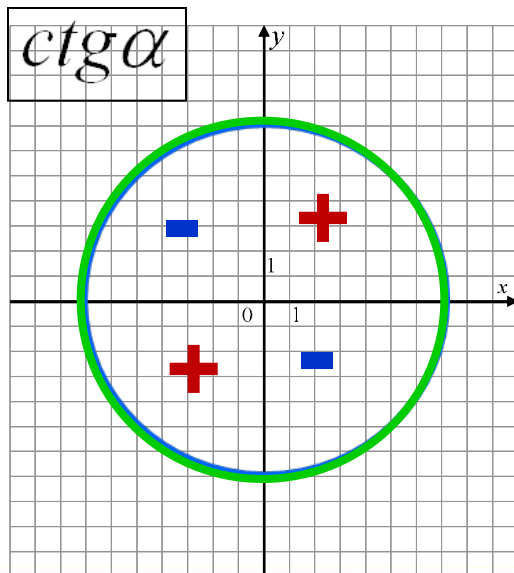
$\cos \alpha$



$tg \alpha$



$ctg \alpha$



$$\sin 68^\circ > 0$$

$$\sin 153^\circ > 0$$

$$\sin 249^\circ < 0$$

$$\sin 315^\circ < 0$$

$$\cos 76^\circ > 0$$

$$\cos 236^\circ < 0$$

$$tg 127^\circ < 0$$

$$ctg 195^\circ > 0$$

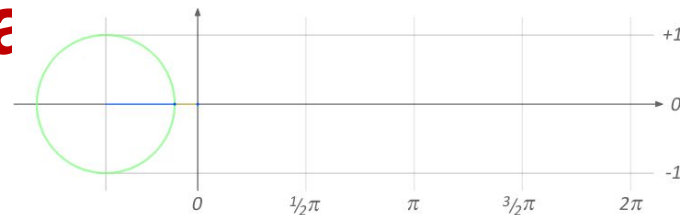
Четность, нечетность синуса, косинуса,

тангенса, котангенса

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

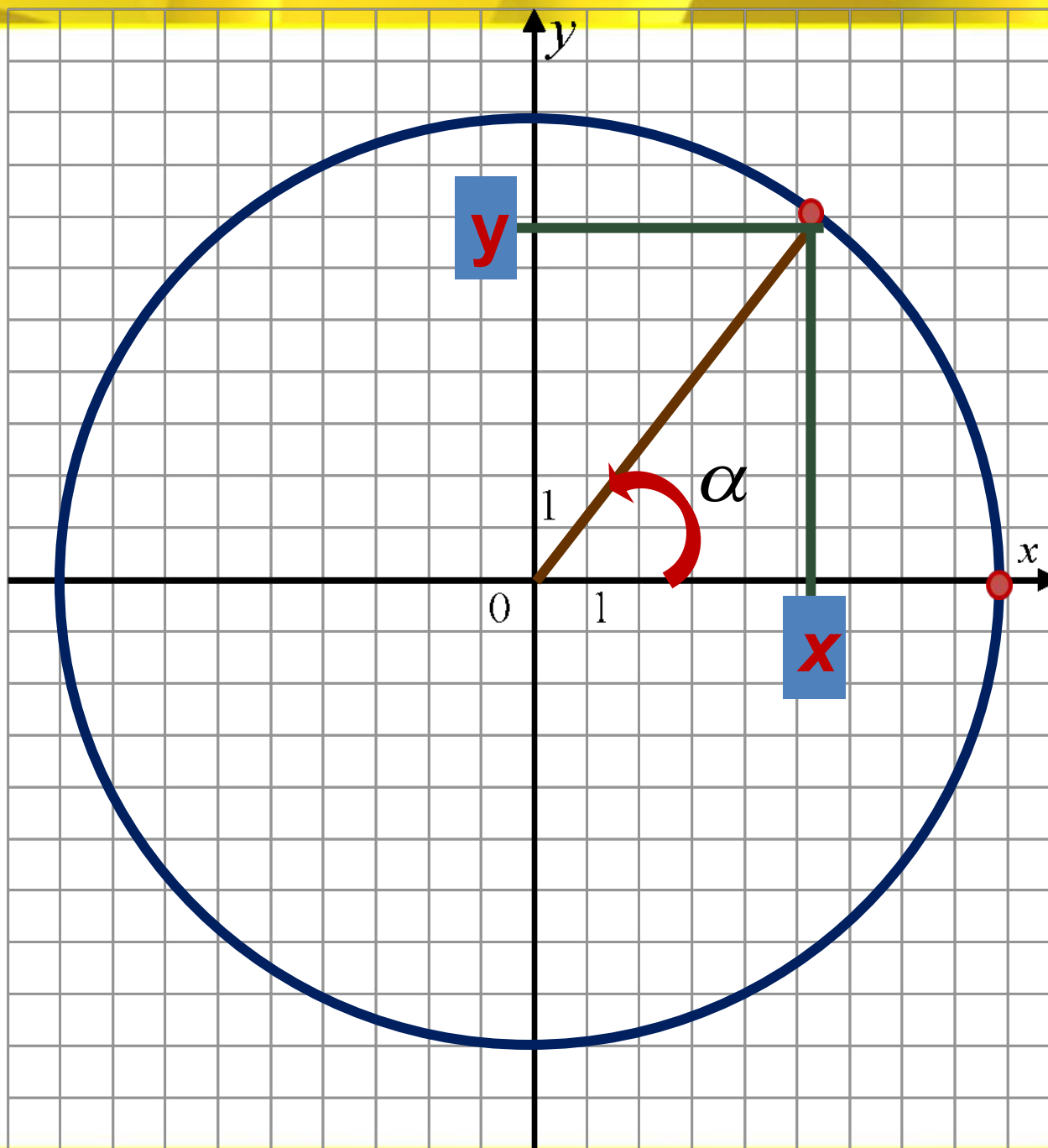


**Нечетные
функции**

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$



**Четная
функция**

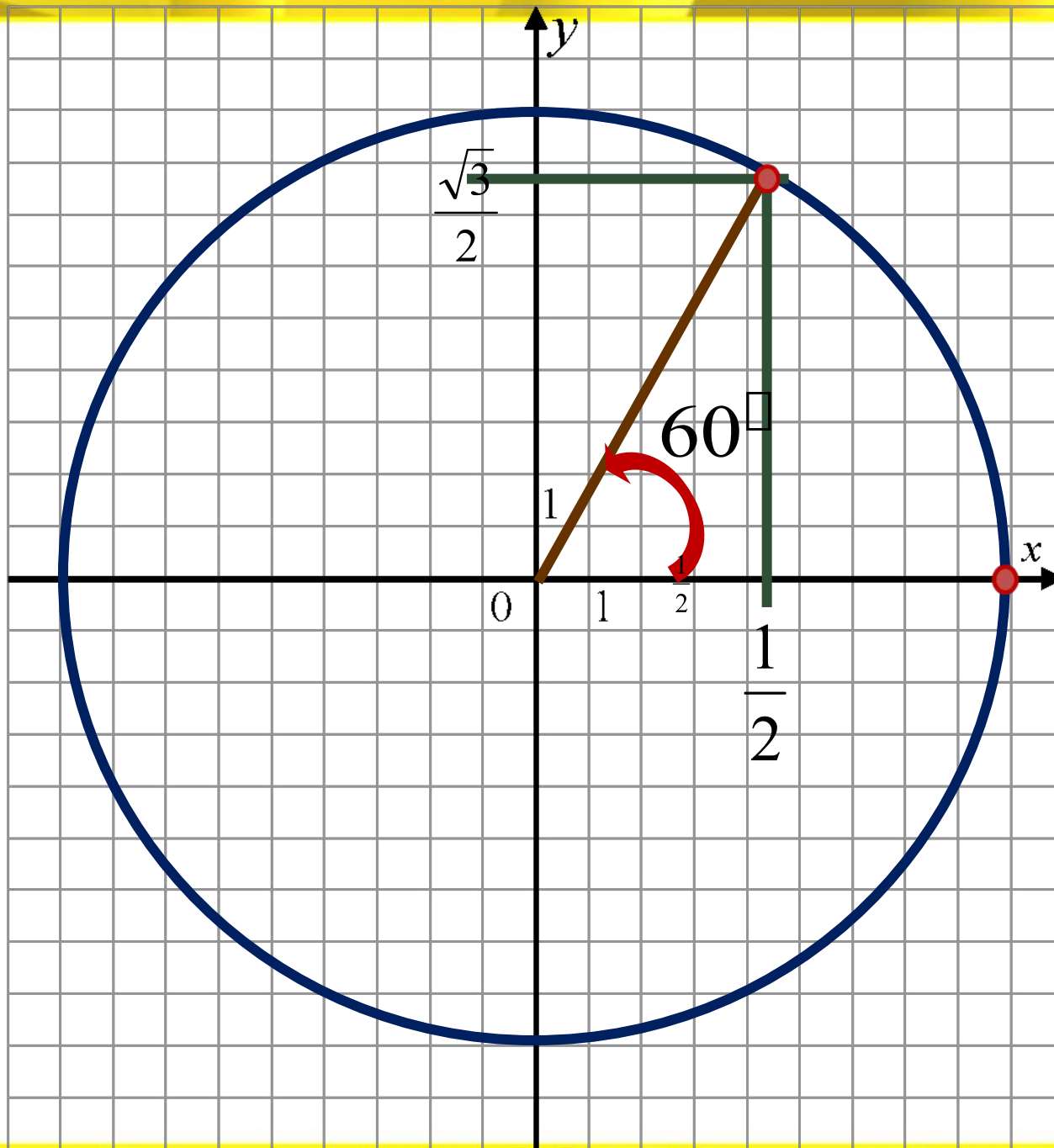


$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \\&= \sin(\alpha + 360^\circ) = \\&= \sin(\alpha + 2 \cdot 360^\circ) = \\&= \sin(\alpha + n \cdot 360^\circ)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \\&= \cos(\alpha + 360^\circ) = \\&= \cos(\alpha + 2 \cdot 360^\circ) = \\&= \cos(\alpha + n \cdot 360^\circ)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \\&= \operatorname{tg}(\alpha + n \cdot 180^\circ)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} \alpha &= \\&= \operatorname{ctg}(\alpha + n \cdot 180^\circ)\end{aligned}$$



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 480^\circ = ?$$

$$\cos 480^\circ = ?$$

$$\begin{aligned} \sin 480^\circ &= \\ &= \sin(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \\ &= \sin(60^\circ + 720^\circ) = \\ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 480^\circ &= \\ &= \cos(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \\ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 765^\circ &= \\&= \sin(45^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \\&= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 1110^\circ &= \\&= \cos(30^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \\&= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\sin(-1470^\circ) = -\sin 1470^\circ = -\sin(30^\circ + 4 \cdot 360^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

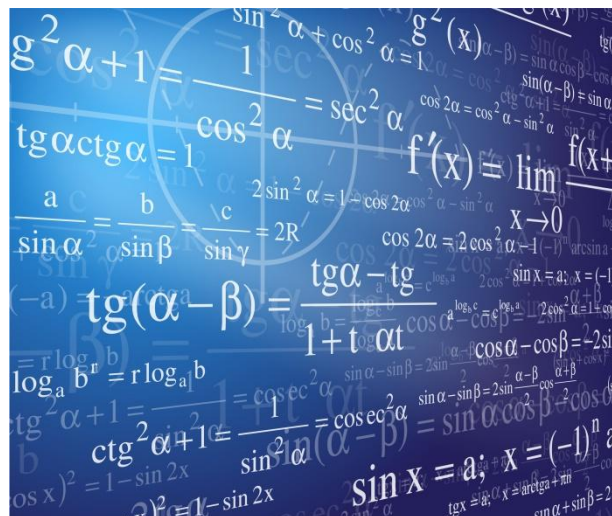
$$\cos(-1140^\circ) = \cos 1140^\circ = \cos(60^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-810^\circ) = -\sin 810^\circ = -\sin(90^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$$

$$\cos(-1170^\circ) = \cos 1170^\circ = \cos(90^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

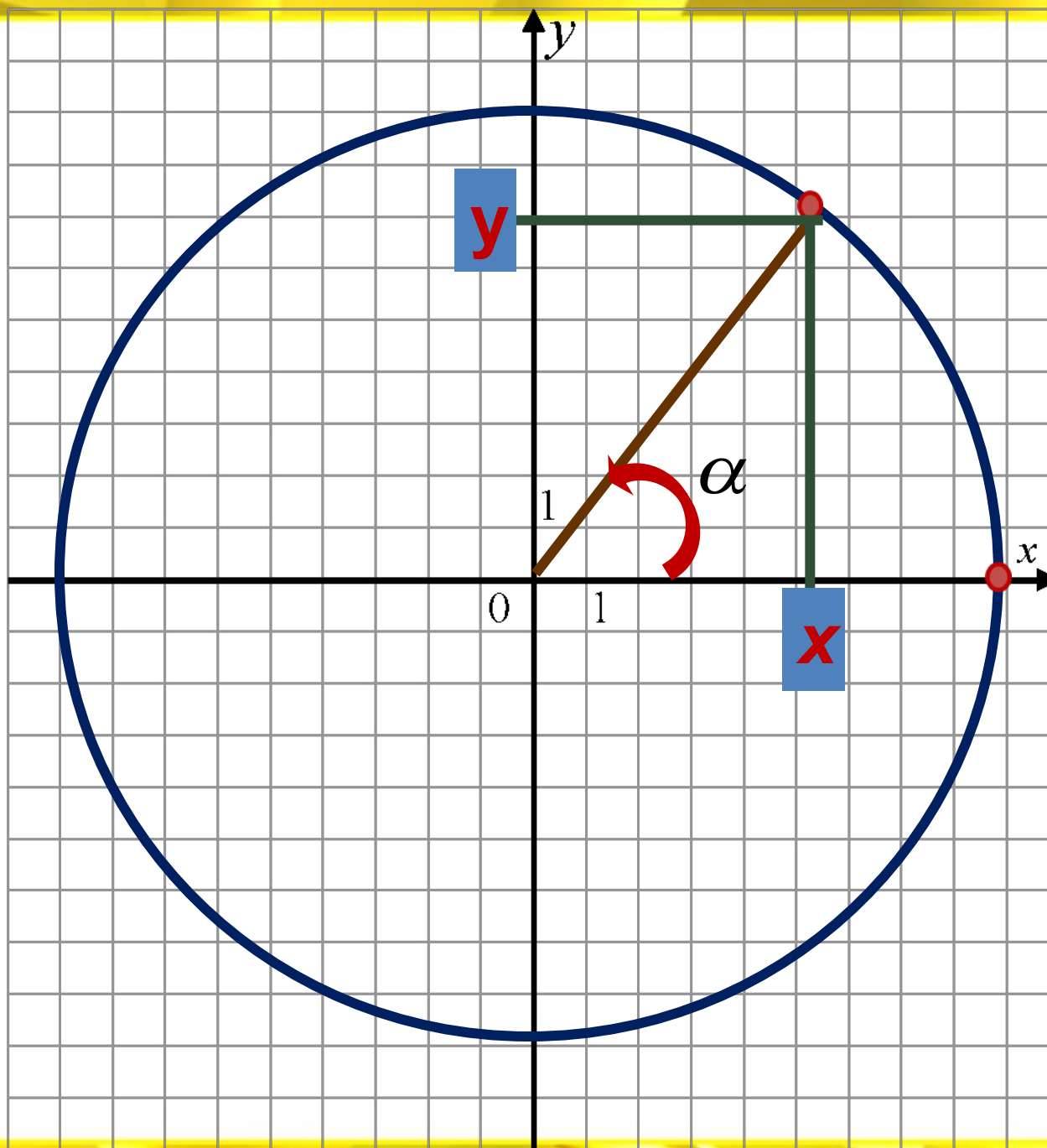
Периодичность тригонометрических функций

При изменении угла на целое число оборотов значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса



изменяются



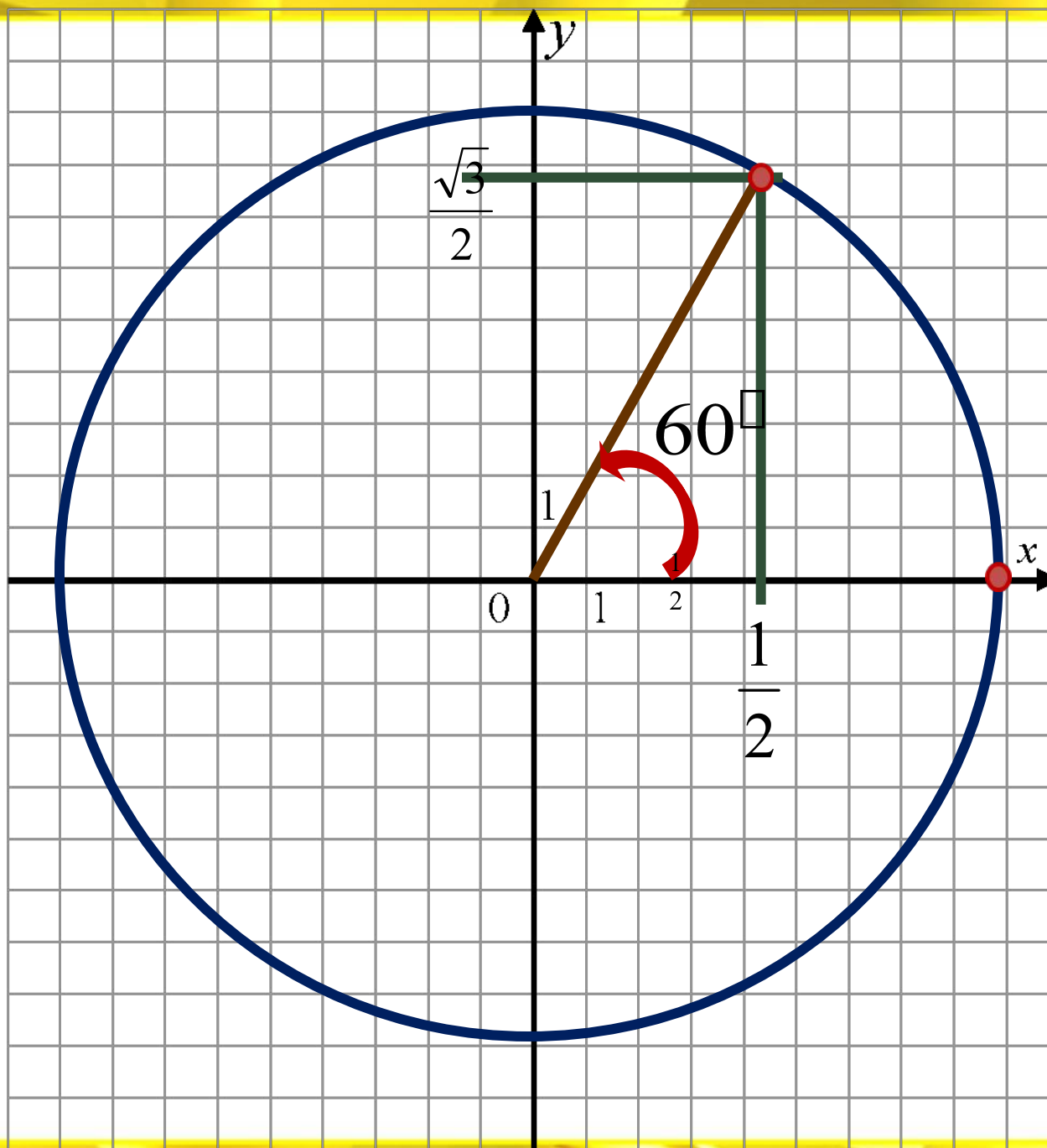


$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \\&= \sin(\alpha + 360^\circ) = \\&= \sin(\alpha + 2 \cdot 360^\circ) = \\&= \sin(\alpha + n \cdot 360^\circ)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \\&= \cos(\alpha + 360^\circ) = \\&= \cos(\alpha + 2 \cdot 360^\circ) = \\&= \cos(\alpha + n \cdot 360^\circ)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}tg \alpha &= \\&= tg(\alpha + n \cdot 180^\circ)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ctg \alpha &= \\&= ctg(\alpha + n \cdot 180^\circ)\end{aligned}$$



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 480^\circ = ?$$

$$\cos 480^\circ = ?$$

$$\begin{aligned} \sin 480^\circ &= \\ &= \sin(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \\ &= \sin(60^\circ + 720^\circ) = \\ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 480^\circ &= \\ &= \cos(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \\ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Косинус, синус суммы и разности двух аргументов

Для любых двух углов α и β справедливы тождества:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов

Для любого угла α справедливы тождества:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$



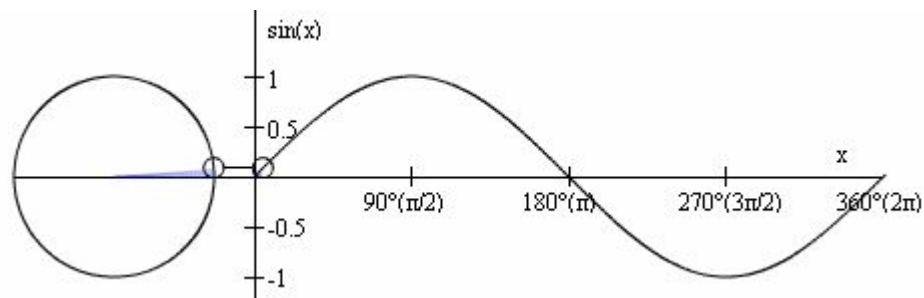
Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

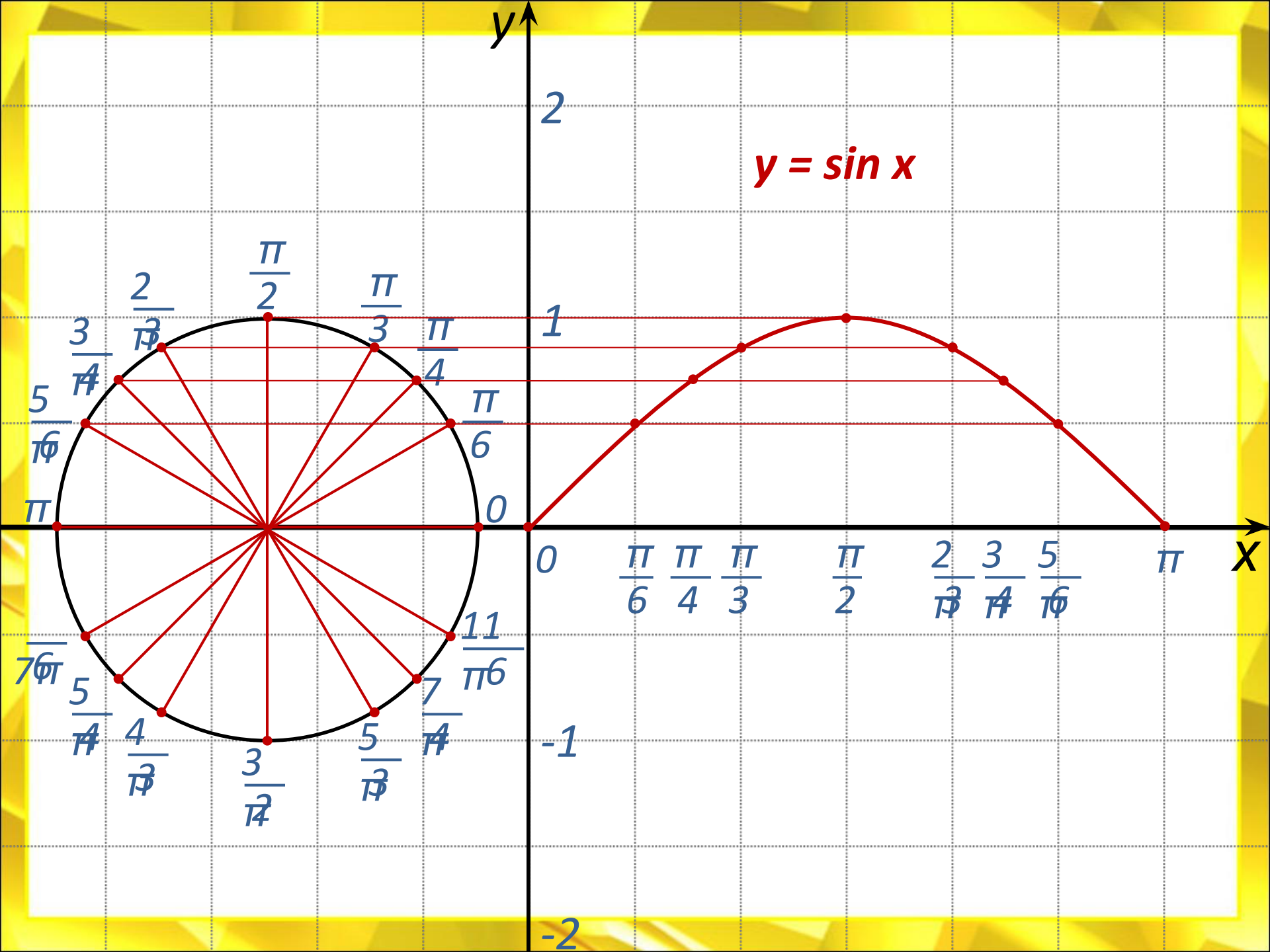
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

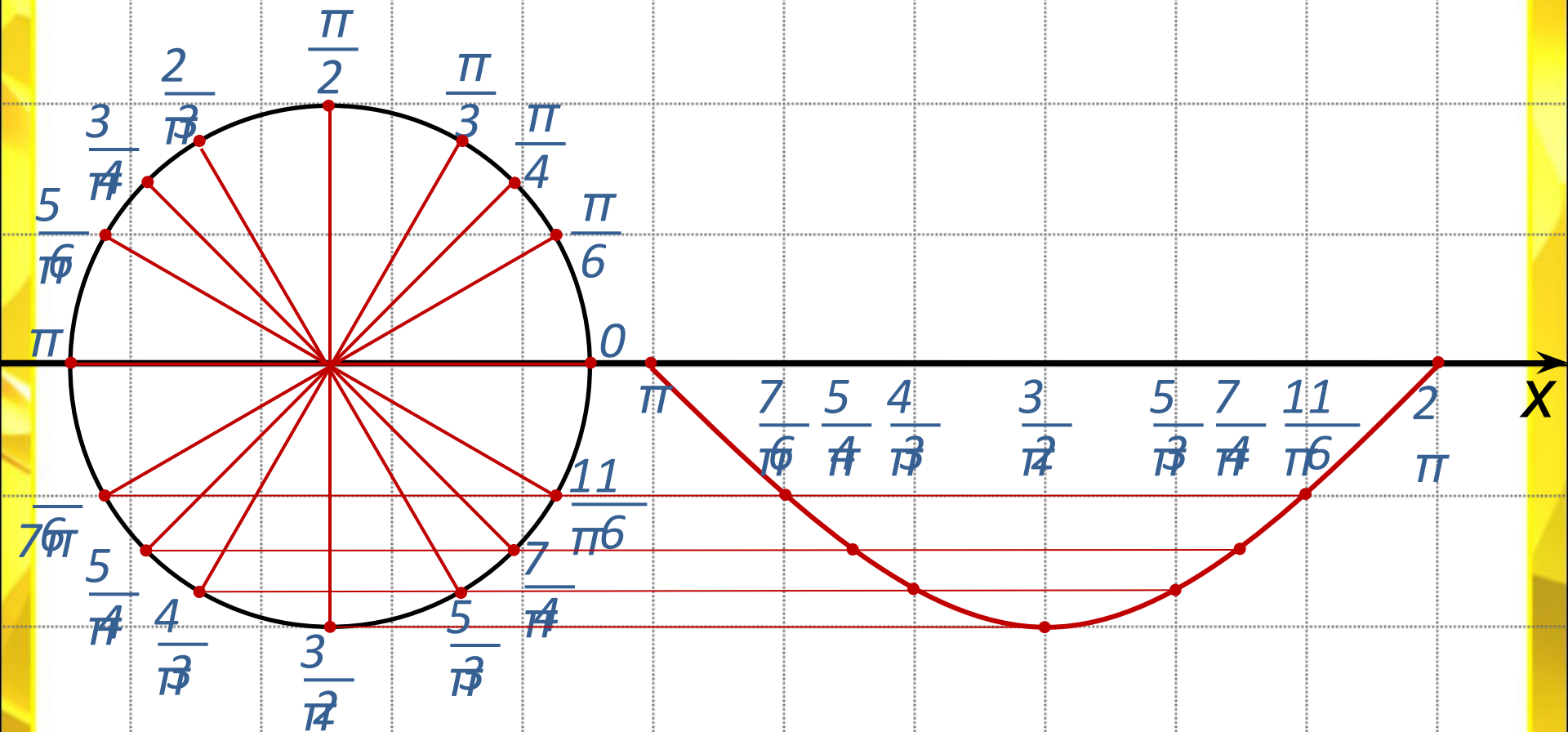


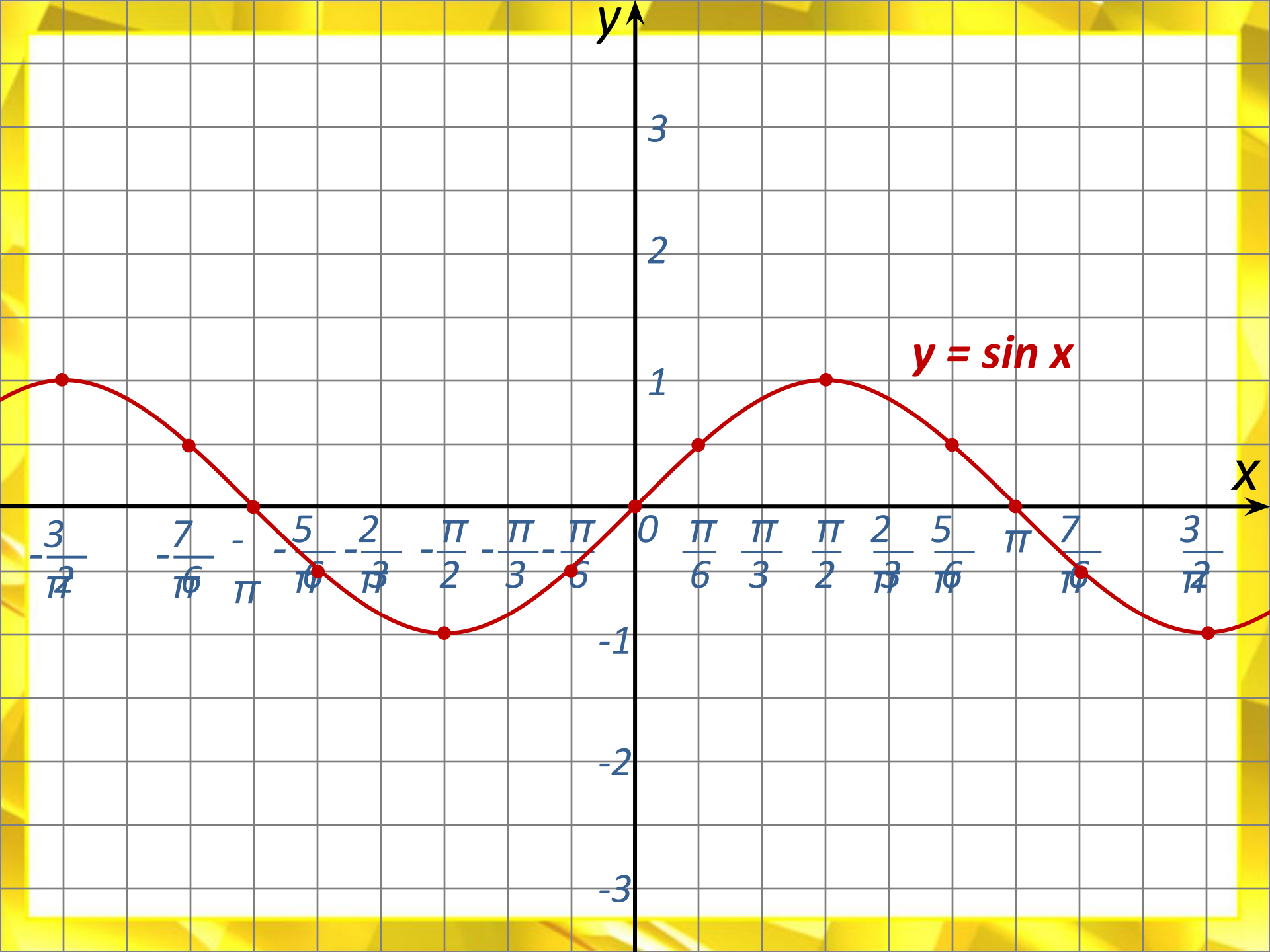
Построение графиков тригонометрических функций

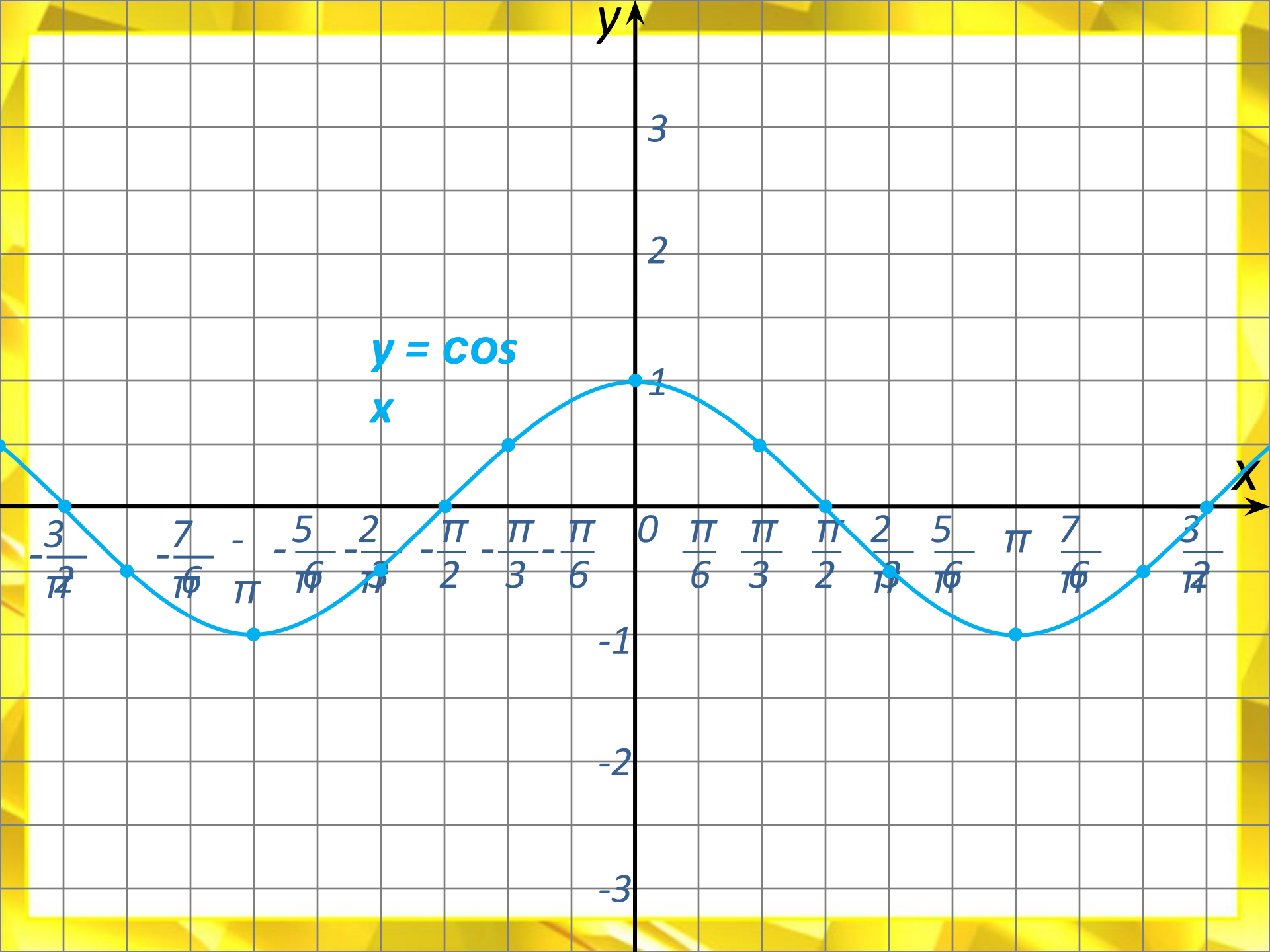


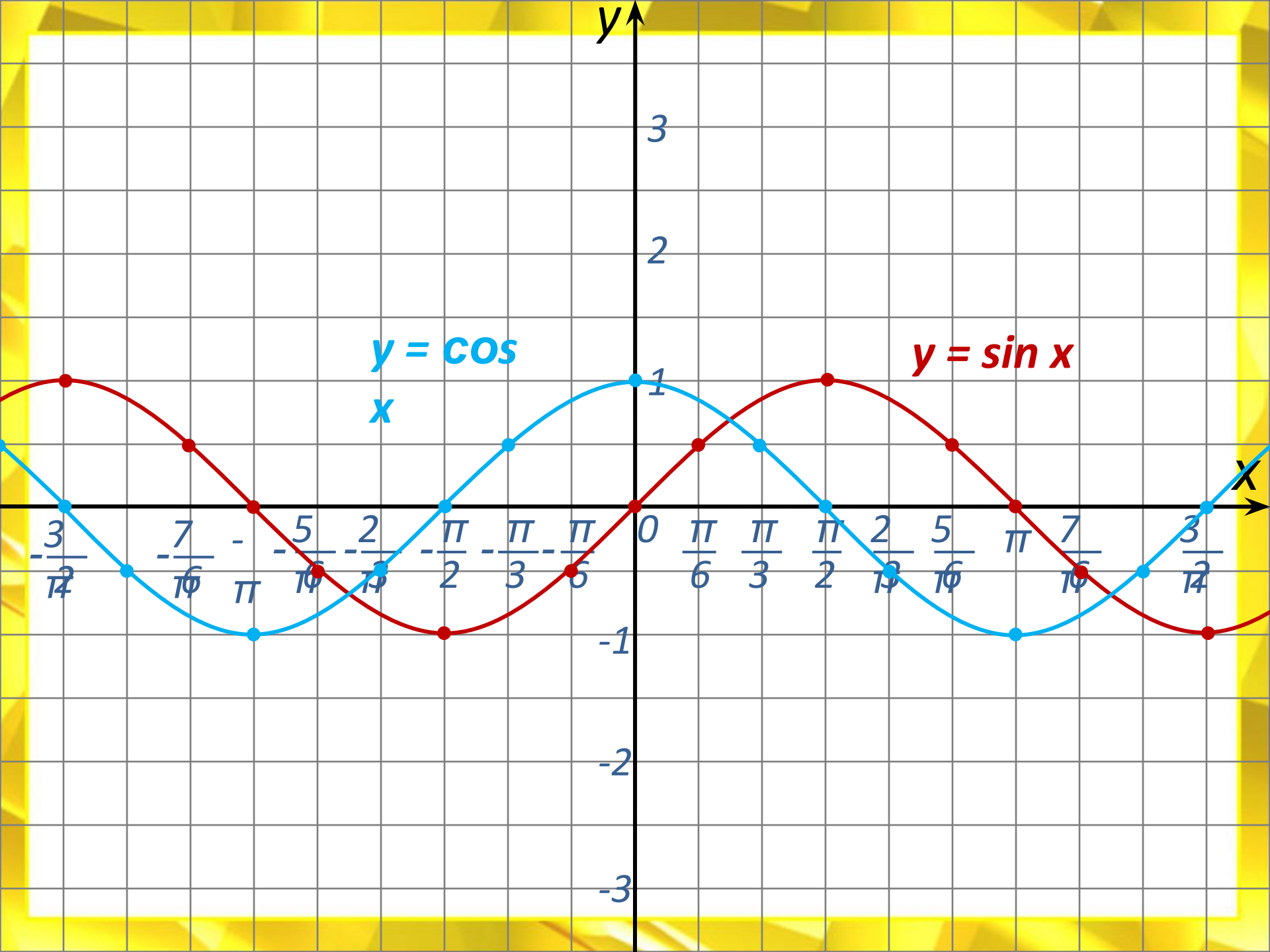


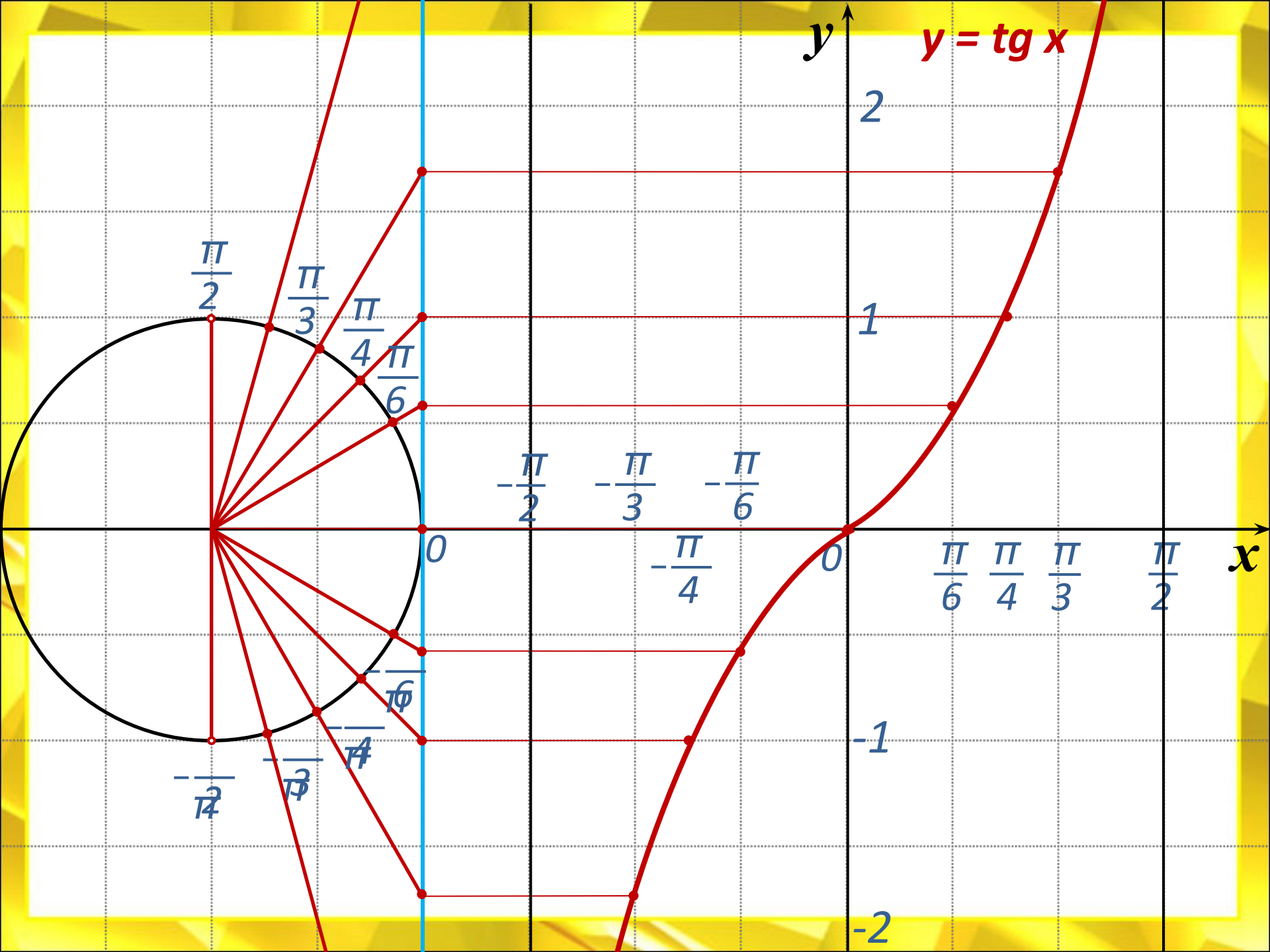
$$y = \sin x$$

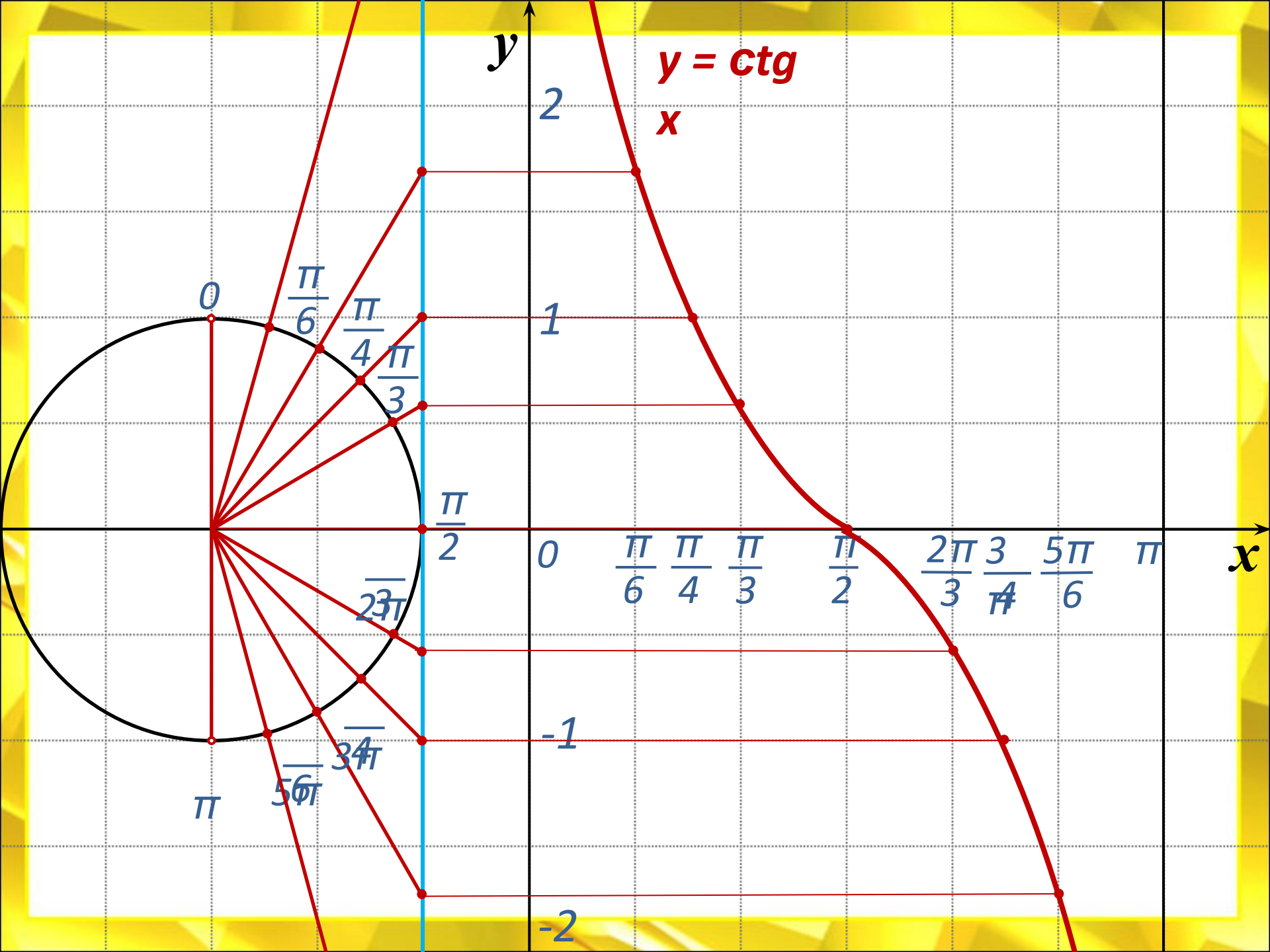








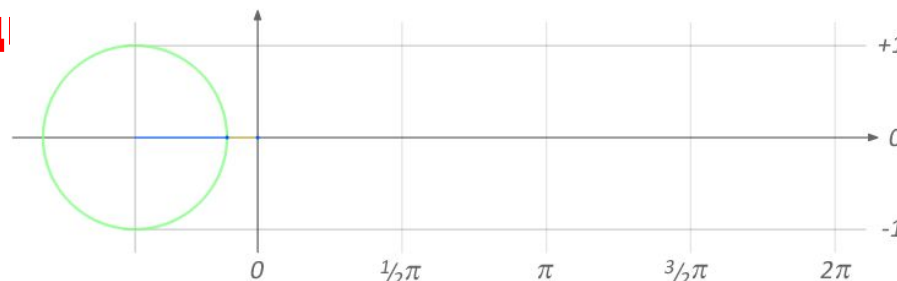




Функция $y = \sin x$

Свойства функции:

1. $D(y) = \mathbb{R}$.
2. $E(y) = [-1; 1]$
3. Функция периодическая; $T = T = 2T = 2\pi$
4. Функция нечетная
5. $\sin x = 0$ при $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
6. Функция возрастает на $[-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$,
убывает на $[\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$.
7. $\sin x > 0$ при $2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 $\sin x < 0$ при $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
8. Наибольшее значение функции $y = 1$;
наименьшее значение функц



Функция $y = \cos x$

Свойства функции:

1. $D(y) = \mathbb{R}$.
2. $E(y) = [-1; 1]$
3. Функция периодическая; $T = 2\pi$
4. Функция четная.
5. $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.
6. Функция возрастает на $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$,
убывает на $[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$.
7. $\cos x > 0$ при $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 $\cos x < 0$ при $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
8. Наибольшее значение функции $y = 1$;
наименьшее значение функции $y = -1$.



Функция $y = \operatorname{tg} x$

Свойства функции:

1. $D(y) = (-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n); n \in \mathbb{Z}$.
2. $E(y) = \mathbb{R}$.
3. Функция периодическая; периодическая; $T = \pi$ периодическая; $T = \pi$.
4. Функция нечетная.
5. $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
6. Функция возрастает на $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.
7. $\operatorname{tg} x > 0$ при $\pi n < x < \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 $\operatorname{tg} x < 0$ при $-\pi/2 + \pi n < x < \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
8. Функция не достигает наибольшего и наименьшего значений.
9. Прямые $\pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, являются асимптотами графика функции.



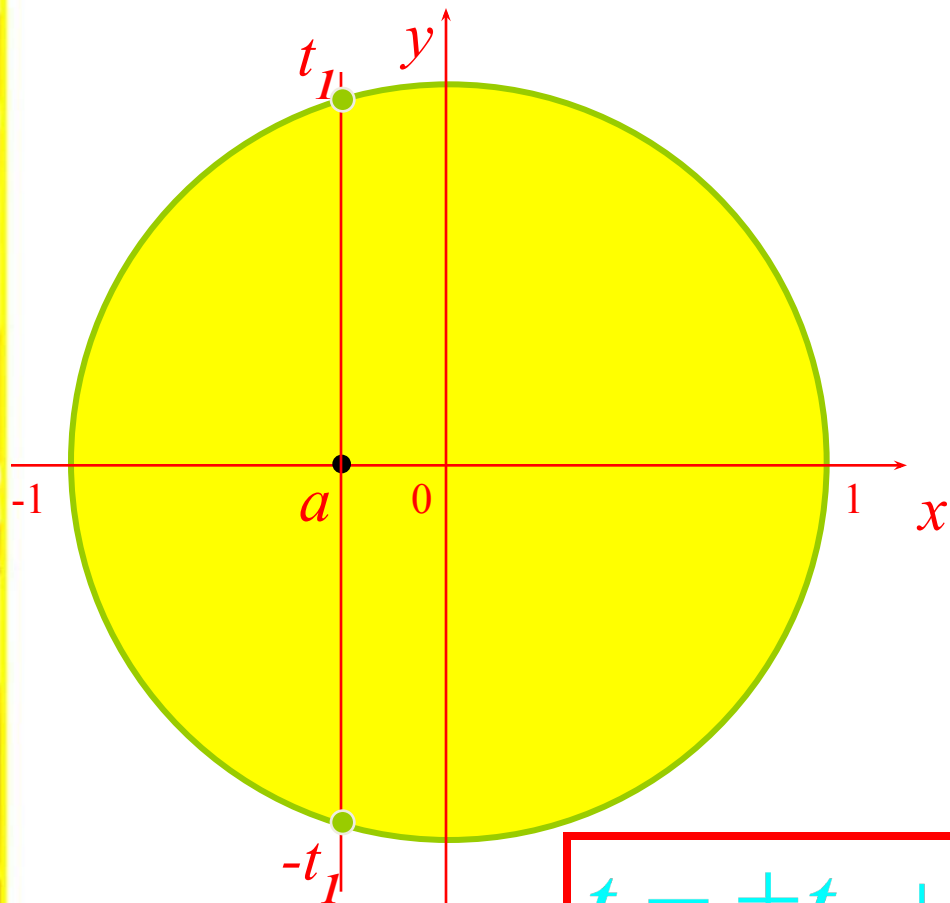
Функция $y = \operatorname{ctg} x$

Свойства функции:

1. $D(y) = (\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.
2. $E(y) = \mathbb{R}$
3. Функция периодическая; $T = \pi$.
4. Функция нечетная.
5. $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
6. Функция убывает на $(\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.
7. $\operatorname{ctg} x > 0$ при $\pi n < x < \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 $\operatorname{ctg} x < 0$ при $\pi/2 + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
8. Функция не достигает наибольшего и наименьшего значений.
9. Прямые $\pi n, n \in \mathbb{Z}$, являются асимптотами графика функции



Уравнение $\cos t = a$



1. Проверить условие $|a| \leq 1$
2. Отметить точку a на оси абсцисс.
3. Построить перпендикуляр в этой точке.
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью
5. Полученные точки – решение уравнения $\cos t = a$.
6. Записать общее решение уравнения

$$t = \pm t_1 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи уравнения $\cos t = a$

$$\cos t = 1$$

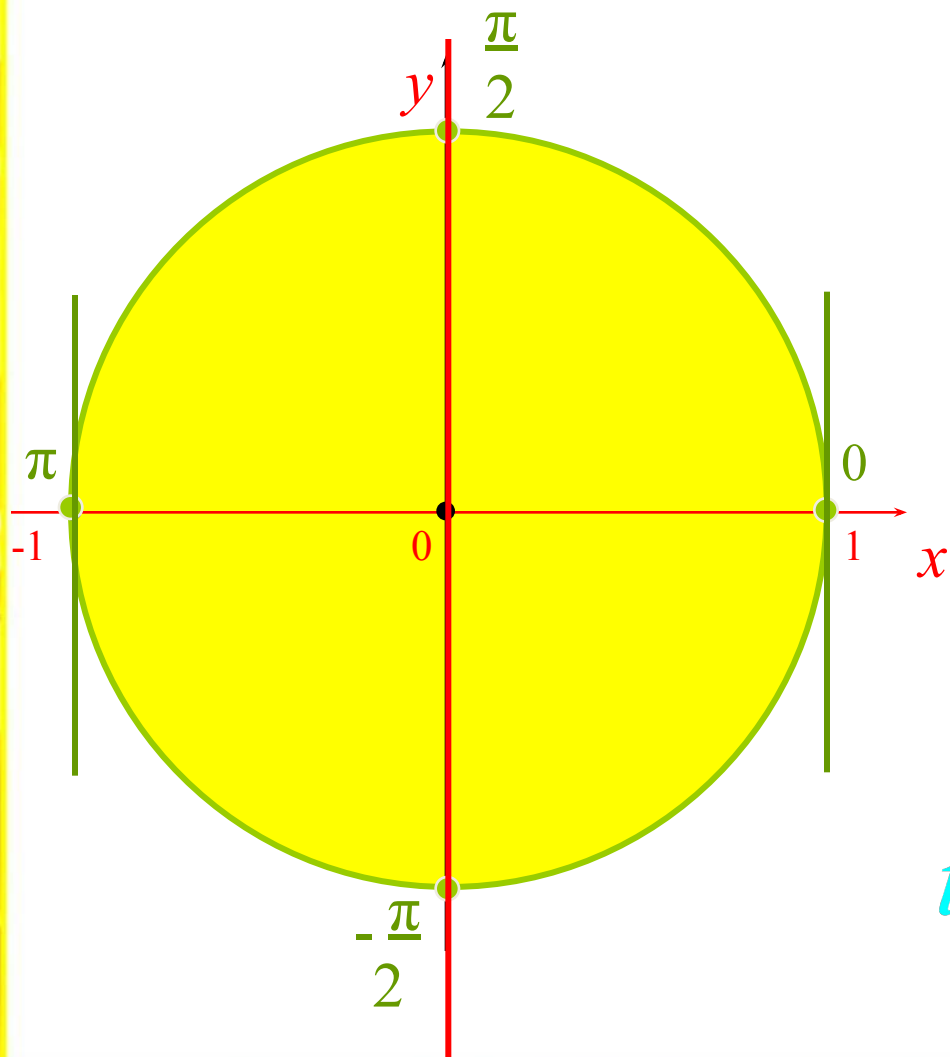
$$t = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos t = 0$$

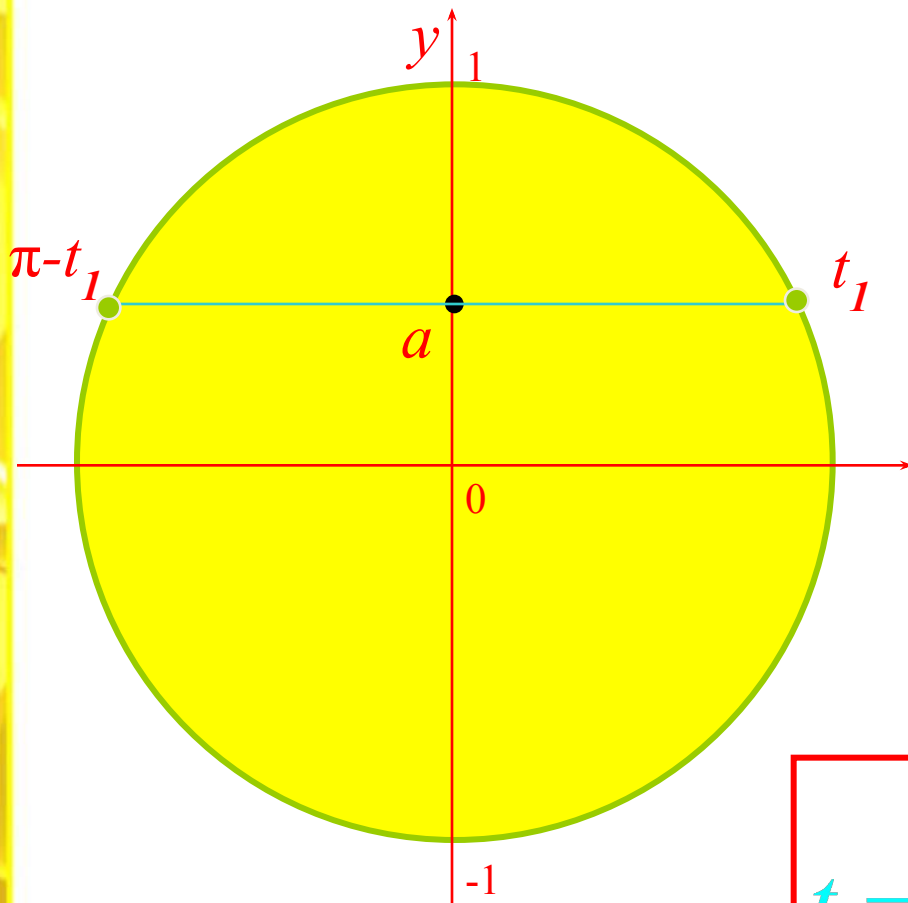
$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos t = -1$$

$$t = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$



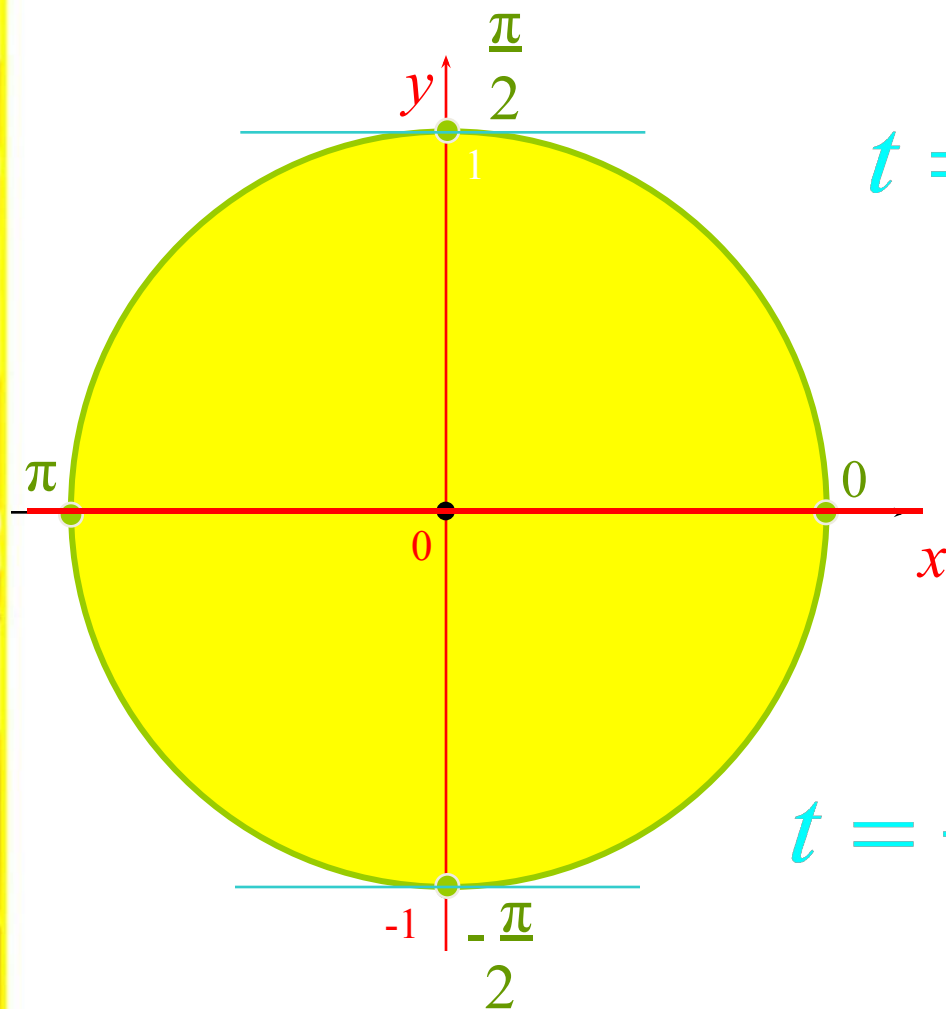
Уравнение $\sin t = a$



1. Проверить условие $|a| \leq 1$
2. Отметить точку a на оси ординат.
3. Построить перпендикуляр в этой точке.
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.
5. Полученные точки – решение уравнения $\sin t = a$.
6. Записать общее решение уравнения.

$$t = \begin{cases} t_1 + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \pi - t_1 + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Частные случаи уравнения $\sin t = a$



$$\sin t = 1$$

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

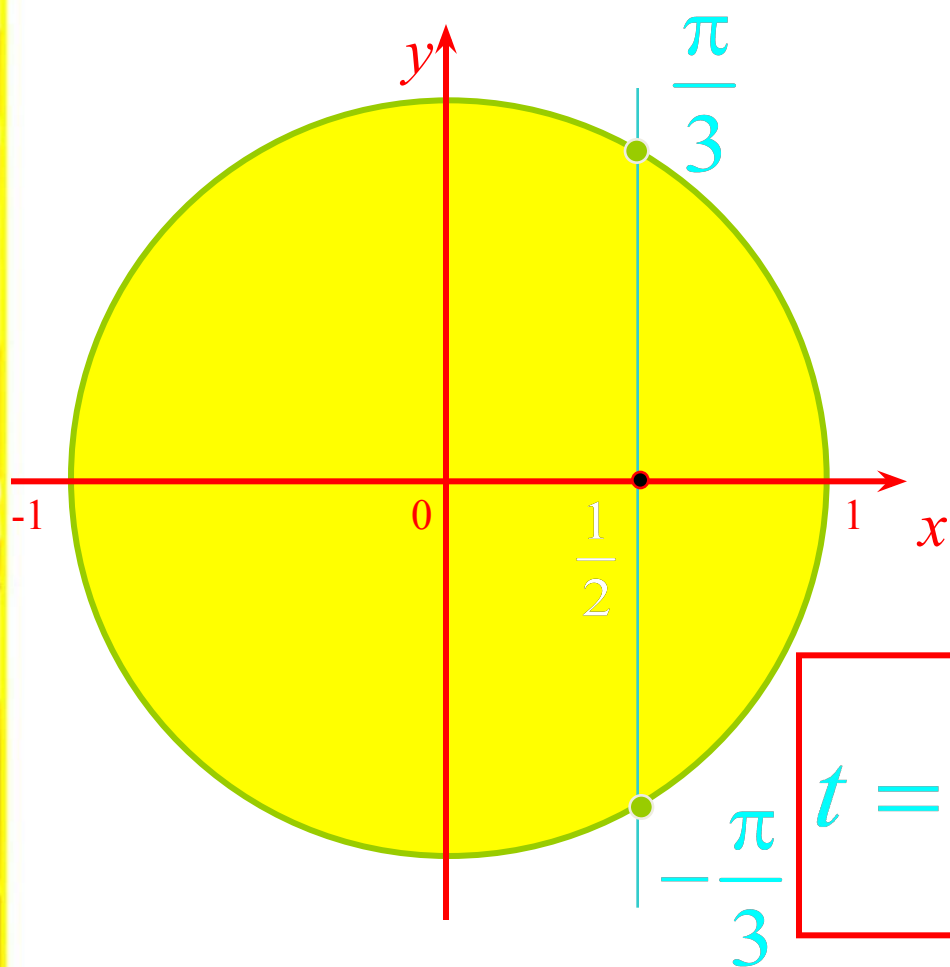
$$\sin t = 0$$

$$t = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin t = -1$$

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

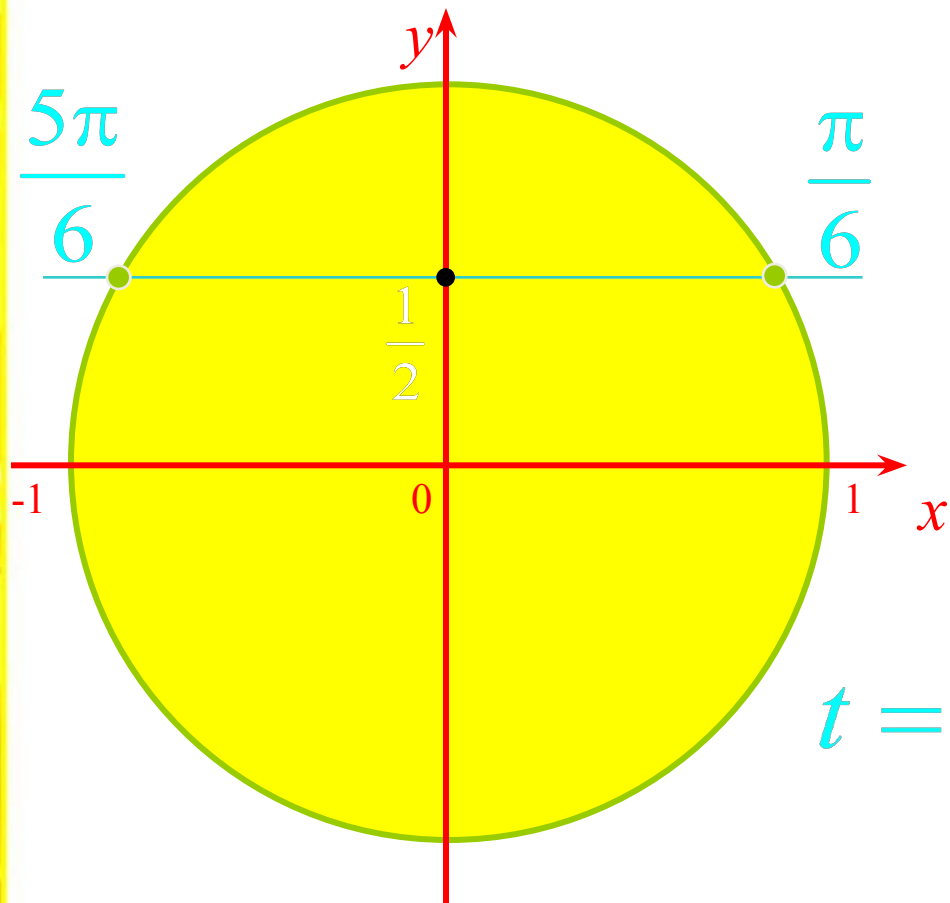
Примеры уравнений



$$\cos t = \frac{1}{2}$$

$$t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

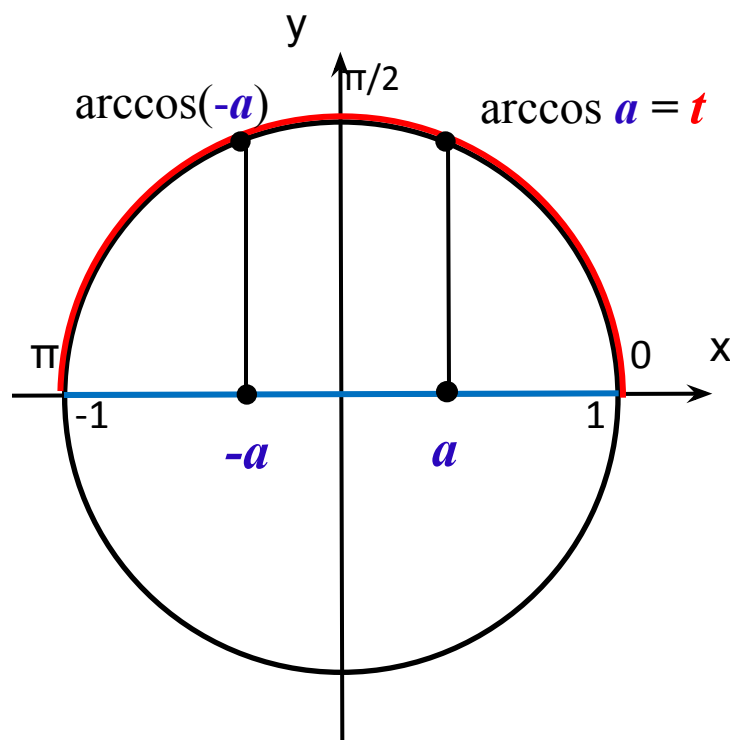
Примеры уравнений



$$\sin t = \frac{1}{2}$$

$$t = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Арккосинус



Арккосинусом числа a называется такое число (угол) t из $[0; \pi]$, что $\cos t = a$.
Причём, $|a| \leq 1$.

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

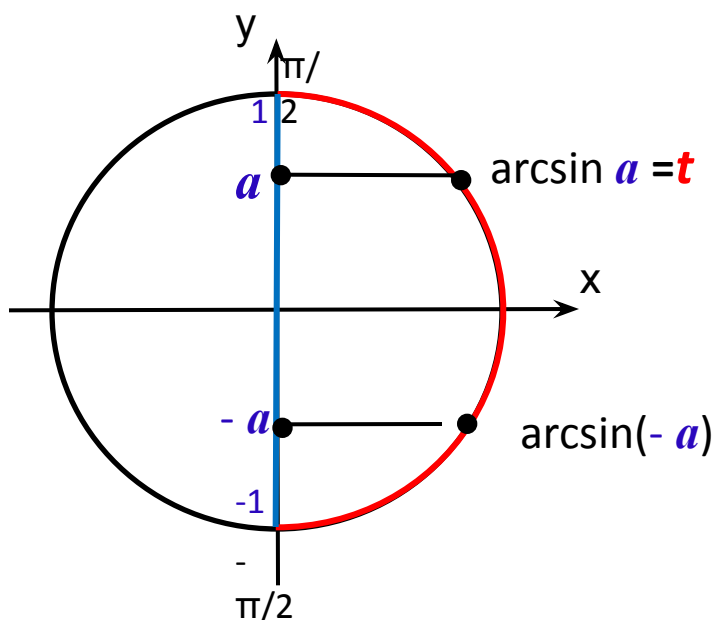
Примеры:

$$1) \arccos(-1) = \pi$$

$$2) \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$



Арксинус



Арксинусом числа a называется такое число (угол) t из $[-\pi/2; \pi/2]$, что $\sin t = a$.
Причём, $|a| \leq 1$.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

Примеры:

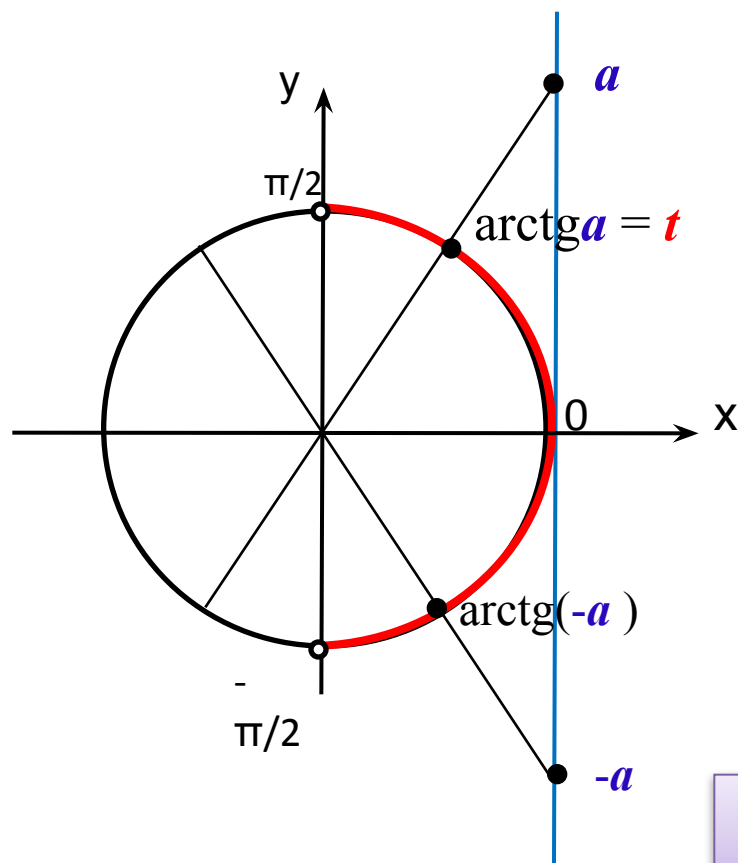
$$1) \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$3) \arcsin 0 = 0$$

$$2) \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}$$



Арктангенс



Примеры:

Арктангенсом числа a называется такое число (угол) t из $(-\pi/2; \pi/2)$, что $tg\ t = a$.
Причём, $a \in \mathbb{R}$.

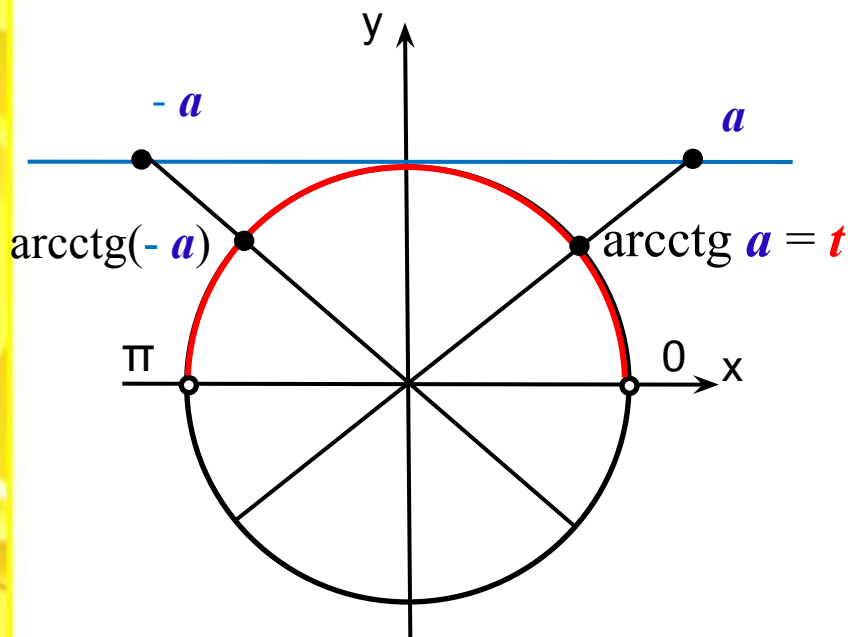
$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$1) \operatorname{arctg} \sqrt{3}/3 = \pi/6$$

$$2) \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$$



Арккотангенс



Арккотангенсом числа a называется такое число (угол) t из $(0; \pi)$, что $\text{ctg } t = a$.
Причём, $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{arcctg}(-a) = \pi - \text{arcctg } a$$

Примеры:

$$1) \text{arcctg}(-1) = 3\pi/4$$

$$2) \text{arcctg}\sqrt{3} = \pi/6$$



Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

$$\cos t = a, \text{ где } |a| \leq 1$$

$$t = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

или

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

$$\underline{\cos t = 0}$$

$$t = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\underline{\cos t = 1}$$

$$t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\cos t = -1}$$

$$t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

$$\sin t = a, \text{ где } |a| \leq 1$$

$$t = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ИЛИ

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

$$\underline{\sin t = 0}$$

$$t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\sin t = 1}$$

$$t = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\sin t = -1}$$

$$t = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

$$\operatorname{tg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Ctg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Пример

ы:

$$1) \cos t = -\frac{1}{2}$$

$$t = \pm \arccos(-1/2) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \operatorname{tg} t = 1;$$

$$t = \operatorname{arctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin t = 0$$

Частный случай:

$$t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$4) \operatorname{ctg} t = -\sqrt{3}$$

$$t = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Виды тригонометрических уравнений

Сводимые к квадратным

Решаются методом введения новой переменной

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \leq 1$, тогда $a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$
Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

Пример. Решить уравнение: $2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \cos(x + \pi/6) + 1 = 0,$$

делаем замену: $\cos(x + \pi/6) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

находим корни: $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, откуда следуют два случая:

$$1). \cos(x + \pi/6) = 1, \quad 2). \cos(x + \pi/6) = 1/2,$$

$$x + \pi/6 = 2\pi k,$$

$$x + \pi/6 = \pm \arccos(1/2) + 2\pi n,$$

$$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k;$$

$$x_2 = \pm \pi/3 - \pi/6 + 2\pi n.$$

Виды тригонометрических уравнений

Однородные

Первой степени:

Решаются делением на $\cos x$ (или $\sin x$) и методом введения новой переменной.

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на $\cos x$ (или на $\sin x$). Получим: простое уравнение

$$a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0 \text{ или } \operatorname{tg} x = m$$

Пример. Решите уравнение $\sin x + 2\cos x = 0$.

Решение: Разделим обе части уравнения на $\cos x$.

Получим

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\cos x} + 2 \frac{\cos x}{\cos x} &= 0 \\ \operatorname{tg} x + 2 &= 0 \\ \operatorname{tg} x &= -2 \\ x &= -\operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ответ: $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$



Виды тригонометрических уравнений

Однородные уравнения второй степени:

Решаются делением на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) и методом введения новой переменной.

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2$.

Р е ш е н и е . $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$$\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0, \text{ отсюда } y^2 + 4y + 3 = 0,$$

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, отсюда

$$1) \operatorname{tg} x = -1, \quad 2) \operatorname{tg} x = -3,$$

Ответ:

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Виды тригонометрических уравнений

Уравнение вида:

$$A \sin x + B \cos x = C, \quad A, B, C \neq 0$$

$$1. \sin 2x = \sin x$$

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

$$2. 3 \sin x = 2 \cos^2 x$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = t$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \quad t = -2$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \sin x = -2$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Нет решения.}$$

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Решение. Перенесём все члены уравнения влево:

$$\sin x + \cos x - 1 = 0,$$

$$\sin x - 2 \sin^2(x/2) = 0,$$

$$2 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) - 2 \sin^2(x/2) = 0,$$

$$2 \sin(x/2) \cdot [\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0,$$

$$1). \sin(x/2) = 0, \quad 2). \cos(x/2) - \sin(x/2) = 0,$$

$$x/2 = \pi k,$$

$$\tan(x/2) = 1,$$

$$x_1 = 2\pi k;$$

$$x/2 = \arctan 1 + \pi n,$$

$$x/2 = \pi/4 + \pi n,$$

$$x_2 = \pi/2 + 2\pi n.$$

Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки

Решаются с помощью введения вспомогательного аргумента.

$$A \sin x + B \cos x = C$$

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$tgx = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1-tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5, x \in \mathbb{Z}$$

$$3 \frac{2tg \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} + 4 \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = 5$$

$$\frac{6tg \frac{x}{2} + 4 - 4tg^2 \frac{x}{2} - 5 - 5tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$\begin{cases} 9tg^2 \frac{x}{2} - 6tg \frac{x}{2} + 1 = 0 \\ 1+tg^2 \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3tg \frac{x}{2} - 1 \right)^2 = 0$$

$$tg \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2} = \arctg \frac{1}{3} + \pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\arctg \frac{1}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения корнями данного уравнения.

$$\cos \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Проверка

Если $x = \pi + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$,

$$3 \sin(\pi + 2\pi) + 4 \cos(\pi + 2\pi) = 5, x \in \mathbb{Z}$$

$$0 + 4(-1) = 5 \text{ не верно, значит}$$

$x = \pi + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$ не является корнями исходного уравнения

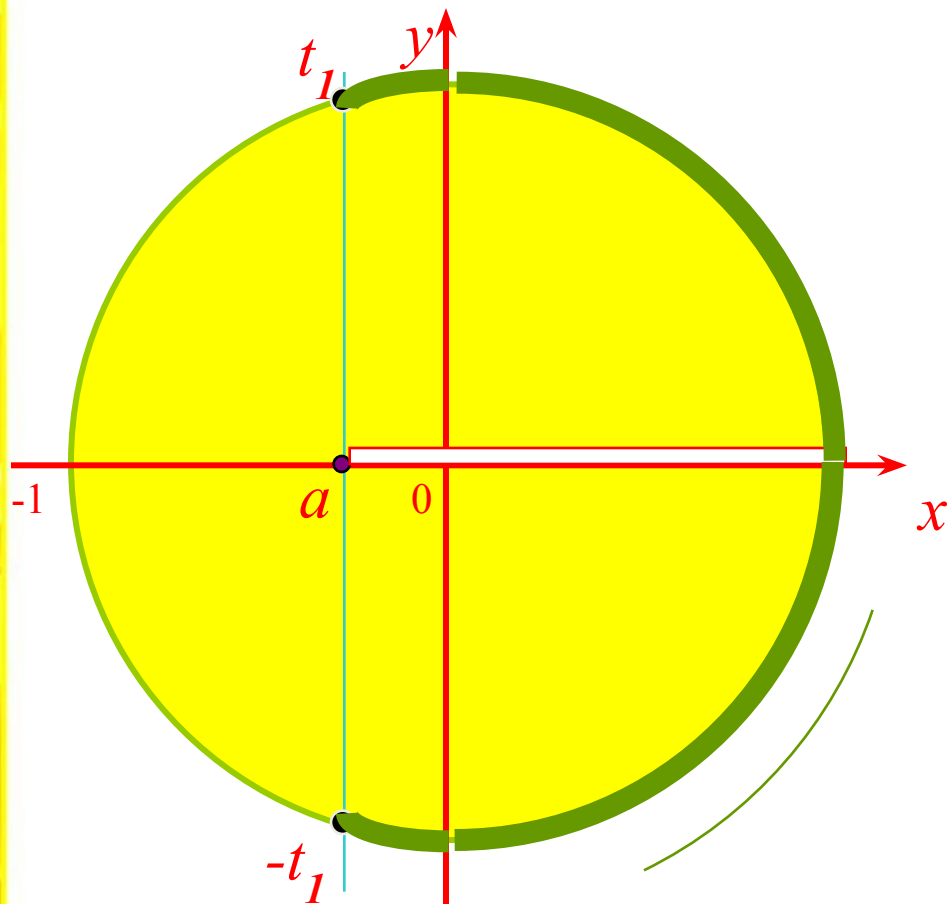
Ответ: $x = 2\arctg \frac{1}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$

Правил а

- ❑ Увидел квадрат – понижай степень!
- ❑ Увидел произведение – делай сумму!
- ❑ Увидел сумму – делай произведение!



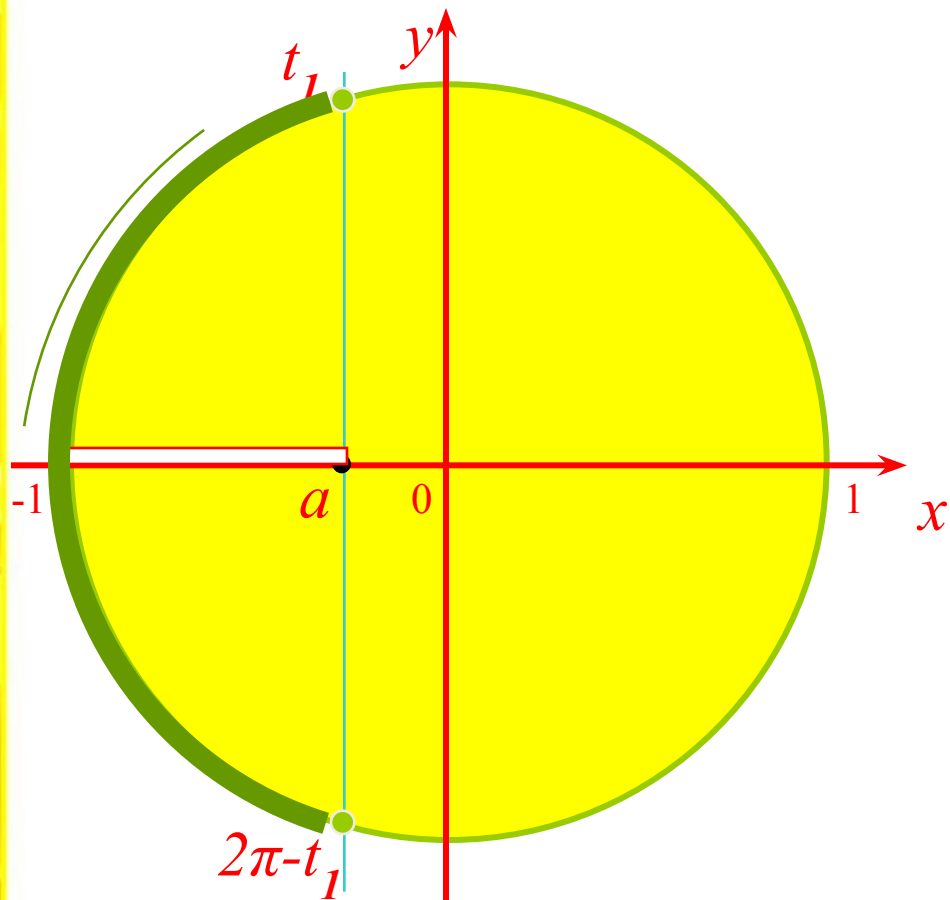
Неравенство $\cos t > a$



1. Отметить на оси абсцисс интервал $x > a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in (-t_1 + 2\pi n; t_1 + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

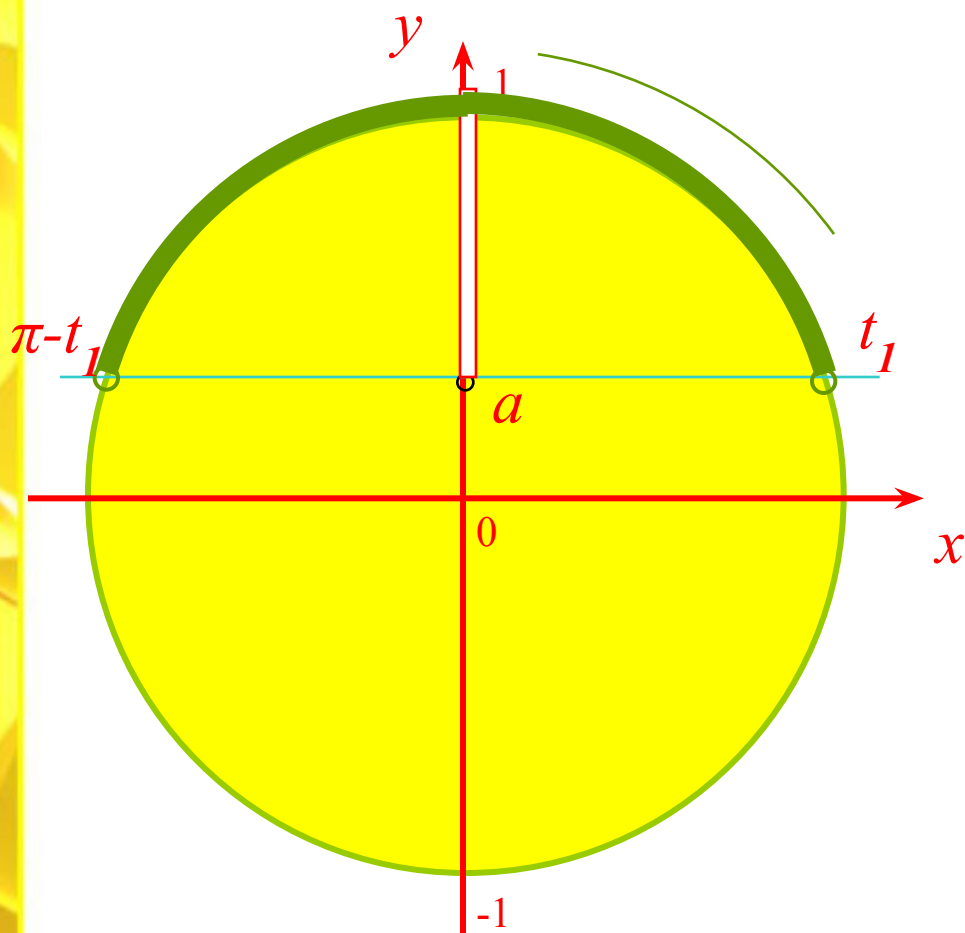
Неравенство $\cos t \leq a$



1. Отметить на оси абсцисс интервал $x \leq a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in [t_1 + 2\pi n; 2\pi - t_1 + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

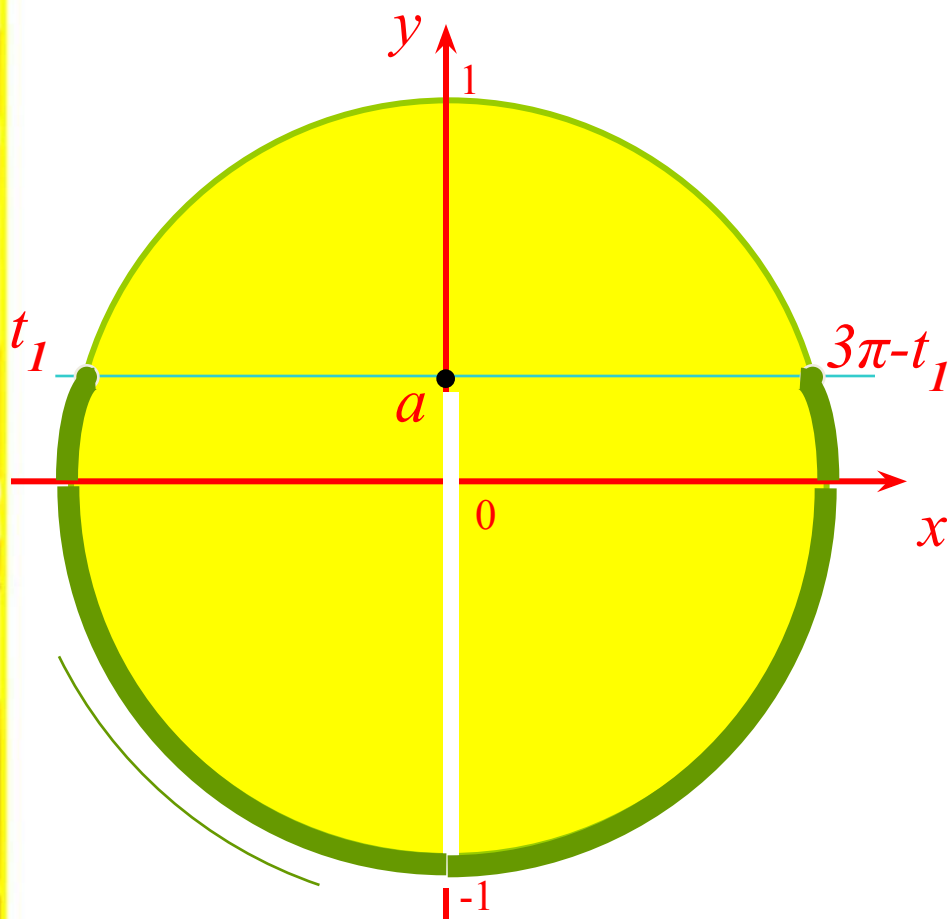
Неравенство $\sin t > a$



1. Отметить на оси ординат интервал $y > a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in (t_1 + 2\pi n; \pi - t_1 + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Неравенство $\sin t \leq a$



1. Отметить на оси ординат интервал $y \leq a$.

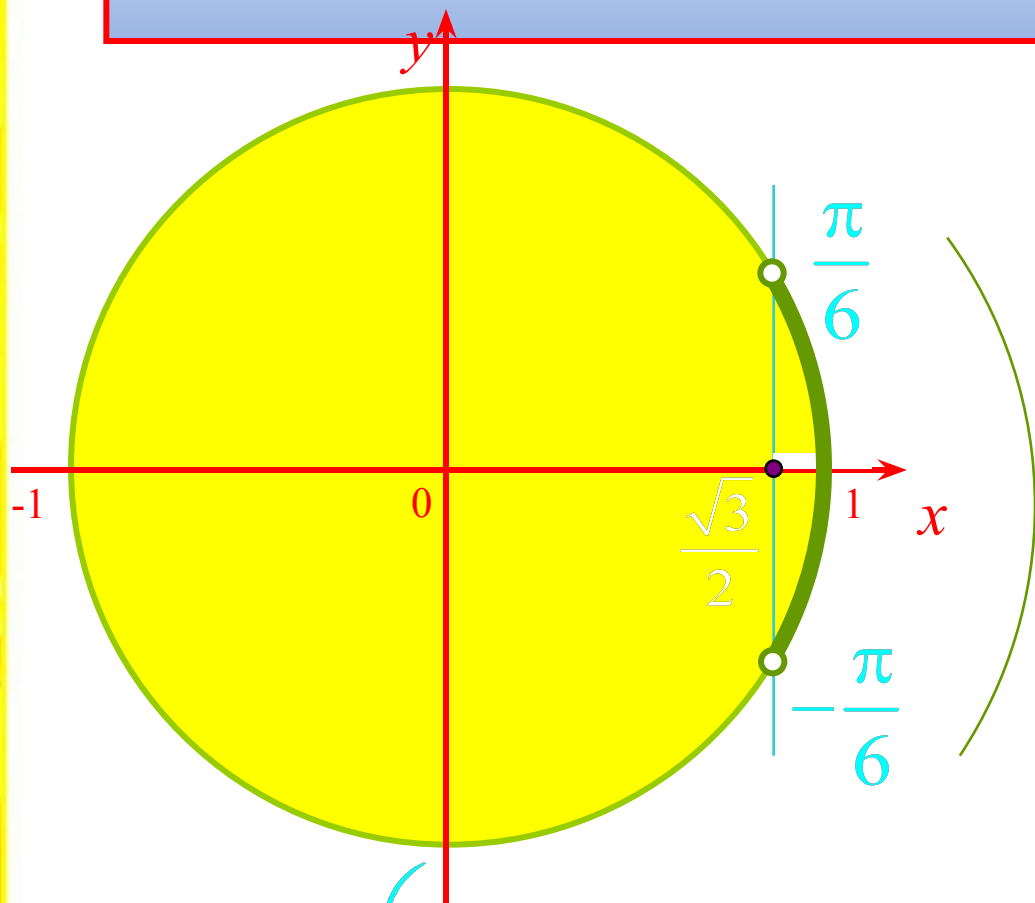
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.

3. Записать числовые значения граничных точек дуги.

4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in [t_1 + 2\pi n; 3\pi - t_1 + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

Примеры неравенств



$$\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

1 Вариант

часть 1

Найдите корни уравнения $\cos t = -\frac{1}{2}$

на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

А) $-\frac{\pi}{3}$; Б) $\frac{\pi}{3}$; В) $-\frac{\pi}{6}$; Г) корней нет

Чему равен $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

А) $-\frac{\pi}{6}$; Б) $\frac{7\pi}{6}$; В) $\frac{5\pi}{6}$; Г) $-\frac{\pi}{3}$.

Решите уравнение $\sin^2 x - 3 \sin x = 0$.

А) $(-1)^k \arcsin 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \pi n, n \in \mathbb{Z}$; Б) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
В) $(-1)^k \arcsin 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) корней нет

2 Вариант

часть 1

Найдите корни уравнения $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

А) $\frac{\pi}{3}$; Б) $\frac{2\pi}{3}$; В) $-\frac{2\pi}{3}$; Г) корней нет

Чему равен $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$?

А) $-\frac{\pi}{6}$; Б) $\frac{7\pi}{6}$; В) $\frac{5\pi}{6}$; Г) $-\frac{\pi}{3}$.

Решите уравнение $2\cos x - \cos^2 x = 0$.

А) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \pm \arccos 2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

Б) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

В) $\pm \arccos 2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) корней нет

1 Вариант

часть 2

Определите число корней уравнения $\cos x = 0,1x$.

А) 3; Б) 5; В) 10; Г) 7.

2 Вариант

часть 2

Определите число корней уравнения $\cos x = 0,2x$.

А) 3; Б) 4; В) 2; Г) 5.

Отвeты тeстa

1 Вaриaнт:
Г, В, Б, Г.

2 Вaриaнт:
Б, А, Б, А.



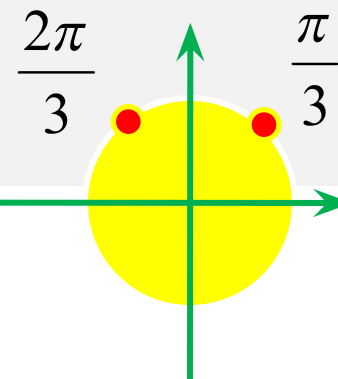
Учимся решать!

Тригонометрия на ЕГЭ



Решите уравнение $\sin \frac{\pi(8x-7)}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

В ответе напишите наибольший отрицательный корень.



Решение

$$\frac{\pi(8x-7)}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{8x-7}{3} = \frac{1}{3} + 2n, n \in \mathbb{Z};$$

$$8x-7 = 1+6n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = 1 + \frac{3}{4}n, n \in \mathbb{Z};$$

$$n = -2, x = -0,5;$$

Ответ : $-0,375$.

$$\frac{\pi(8x-7)}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad | : \pi$$

$$\frac{8x-7}{3} = \frac{2}{3} + 2n, n \in \mathbb{Z}; \quad | \times 3$$

$$8x-7 = 2+6n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{9}{8} + \frac{6}{8}n, n \in \mathbb{Z};$$

$$n = -2, x = -\frac{3}{8} = -0,375.$$

Найдите значение выражения $\sqrt{12} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\sqrt{12} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3} &= \sqrt{3} \left(\sqrt{4} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - 1 \right) = \sqrt{3} \left(2 \cos^2 \frac{5\pi}{12} - 1 \right) = \\ &= \sqrt{3} \cos \frac{5\pi}{6} = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1,5.\end{aligned}$$

Ответ: $-1,5$.



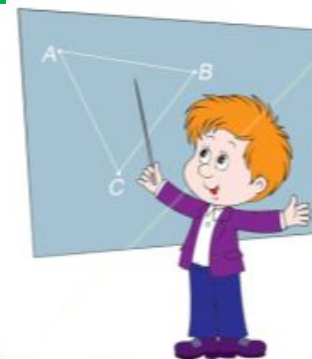
Найдите $\frac{10 \cos \alpha + 4 \sin \alpha + 15}{2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha + 3}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2,5$.

Решение.

Если $\operatorname{tg} \alpha = -2,5$, то $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2,5$, значит, $\sin \alpha = -2,5 \cos \alpha$.

$$\text{Получим: } \frac{10 \cos \alpha + 4(-2,5 \cos \alpha) + 15}{2(-2,5 \cos \alpha) + 5 \cos \alpha + 3} = \frac{10 \cos \alpha - 10 \cos \alpha + 15}{-5 \cos \alpha + 5 \cos \alpha + 3} =$$
$$= \frac{15}{3} = 5.$$

Ответ: 5.



Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 0,5 \sin \pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза, измеряемая в джоулях, вычисляется по формуле

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее $5 \cdot 10^{-3}$ Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Решение.

$$E \geq 5 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{mv^2}{2} \geq 5 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{m(0,5 \sin \pi t)^2}{2} \geq 5 \cdot 10^{-3}.$$

Получим неравенство:
$$\frac{0,08(0,5 \sin \pi t)^2}{2} \geq 5 \cdot 10^{-3}.$$

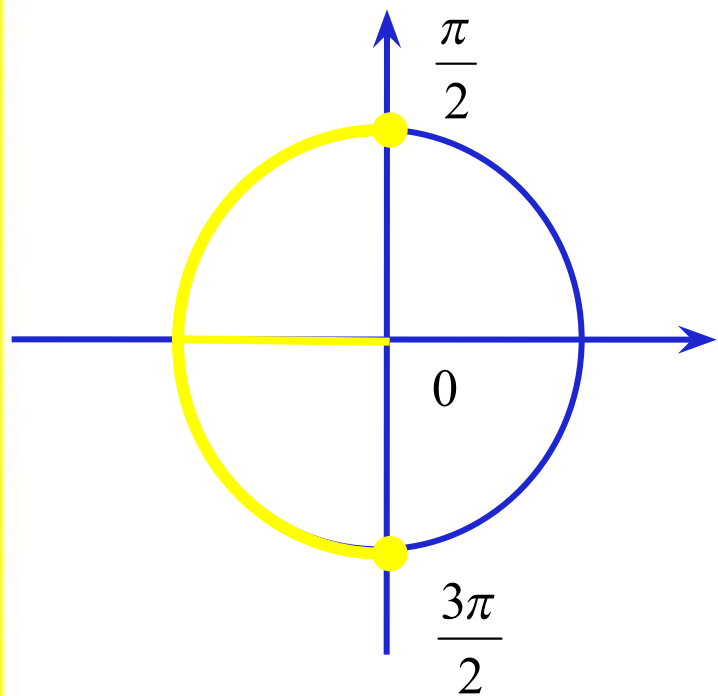


$$\frac{0,08(0,5 \sin \pi t)^2}{2} \geq 5 \cdot 10^{-3}; | \times 2$$

$$0,08 \cdot 0,25 \sin^2 \pi t \geq 10^{-2}; | \times 100$$

$$8 \cdot 0,25 \sin^2 \pi t \geq 1; \quad 2 \sin^2 \pi t \geq 1; \quad 2 \sin^2 \pi t - 1 \geq 0;$$

$$-\cos 2\pi t \geq 0; \quad \cos 2\pi t \leq 0.$$



Так как необходимо найти долю времени из первой секунды после начала движения, то имеем:

$$\frac{\pi}{2} \leq 2\pi t \leq \frac{3\pi}{2}; | : 2\pi; \quad \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}.$$

$$\text{Значит, } \Delta t = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ сек.}$$

$$\text{Получим: } \frac{0,5}{1} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Решить уравнение:

$$\frac{\cos 2x + \cos x + 2 \sin^2 x - 1,5}{\sqrt{-2 \sin x}} = 0.$$

Задание С1



Решение:

$-2 \sin x > 0$, значит, $\sin x < 0$. Получим:

$$1 - 2 \sin^2 x + \cos x + 2 \sin^2 x - 1,5 = 0,$$

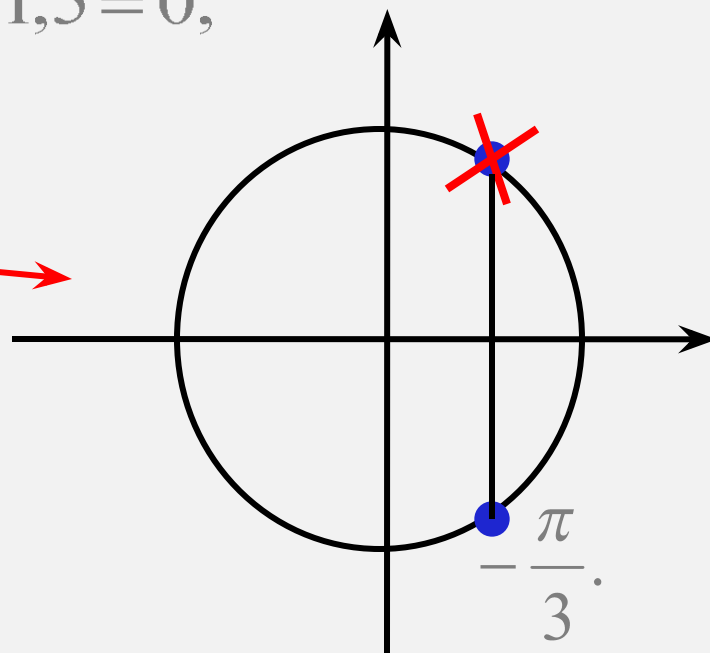
$$\cos x - 0,5 = 0,$$

$$\cos x = 0,5.$$

Так как $\sin x < 0$, то

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Решите уравнение: $\sqrt{3} \cdot \sin x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cdot \sin x = \sqrt{3}$.

Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$.



Решение:

1) $\cos x \neq 0$.

2) $\sin x(\sqrt{3} + \operatorname{tg} x) - (\sqrt{3} + \operatorname{tg} x) = 0$; $(\sqrt{3} + \operatorname{tg} x)(\sin x - 1) = 0$;

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ или $\sin x = 1$, так как $\cos x \neq 0$, то решений нет

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3) Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$:

$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + \pi n \leq \frac{7\pi}{4} \left| \times \frac{12}{\pi} \right|$; $-6 \leq -4 + 12n \leq 21$; $-\frac{2}{12} \leq n \leq \frac{25}{12}$.

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то $n = 0, x = -\frac{\pi}{3}$; $n = 1, x = \frac{2\pi}{3}$; $n = 2, x = \frac{5\pi}{3}$.

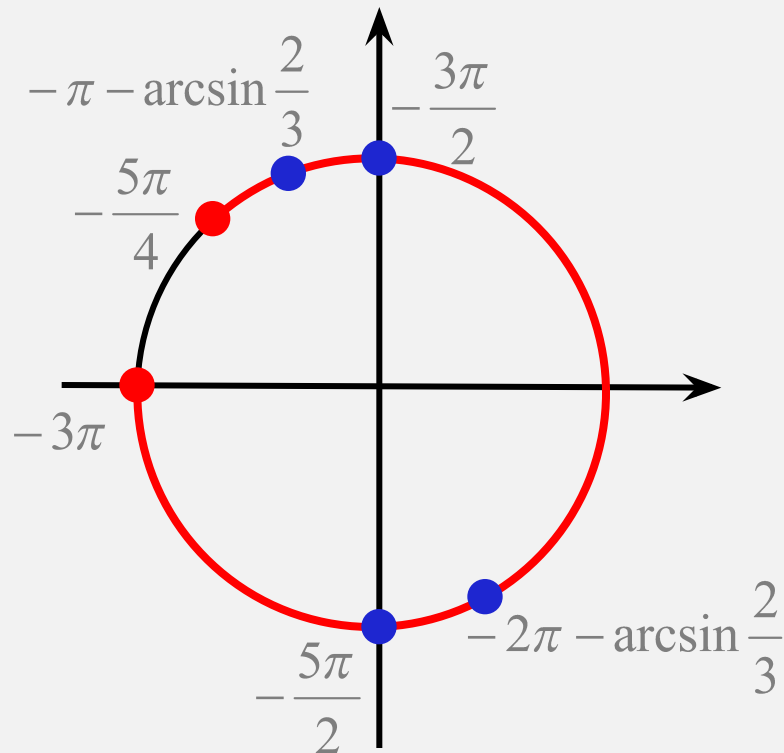
Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.



Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{4}\right]$,
с помощью тригонометрического круга.

$$x = -\arcsin \frac{2}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

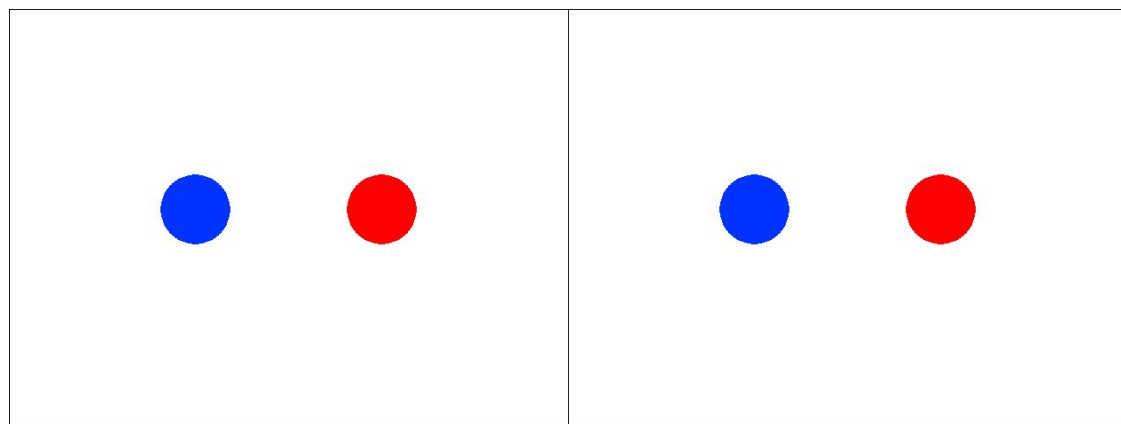


Ответ: $-\arcsin \frac{2}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

$$\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{5\pi}{2}, \quad -2\pi - \arcsin \frac{2}{3},$$

$$-\frac{3\pi}{2}, \quad -\pi - \arcsin \frac{2}{3}.$$



М о л о д ц ы ! ! !