

Решение уравнений и неравенств

Работу выполнили:
Бабушкина К.
Карпикова К.
Ковязина О.
Сысолетин И.
Руководитель работы:
учитель математики
Белоглазова Н.Л.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

2013 г.

Уравнения

Уравнением называется равенство, содержащее неизвестное, обозначаемое буквой. Пользуясь понятием функции, можно сказать, что **уравнение** (с одним неизвестным) - это пара функций от одной и той же переменной x , соединенных знаком равенства:

$$f(x)=g(x)$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Областью допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения называется пересечение области определения функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$D(f) \cap D(g)$$

Число a называется **корнем** (или **решением**) данного уравнения, если при подстановке в уравнение вместо каждого вхождения x числа a уравнение обращается в верное числовое равенство:
 $f(a) = g(a)$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решить уравнение - это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет.

Два уравнения называются *равносильными*, если множества их корней совпадают. Уравнение А является *следствием* уравнения В, если все корни уравнения В являются корнями уравнения А (но, быть может, среди корней уравнения А есть такие, которые не являются корнями В).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решение уравнения

$$\frac{\sqrt{2}(\sin 70^\circ + \sin 20^\circ)}{\cos 25^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \sin \frac{70^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{70^\circ - 20^\circ}{2}}{\cos 25^\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ} = \sqrt{2} \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Системы уравнений с двумя неизвестными

Уравнением с двумя неизвестными x и y называется пара функций от двух переменных (x и y), соединенных знаком равенства:

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$$

Решением такого уравнения называется всякая пара чисел (x_0, y_0), подстановка которых в уравнение вместо соответствующих неизвестных обращает это уравнение в верное равенство.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Системой двух уравнений с двумя неизвестными называется пара уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y) \\ h(x, y) = t(x, y) \end{cases}$$

Решением системы называется пара чисел (x_0, y_0) , являющаяся решением и первого, и второго уравнений системы.

Решить систему - это значит найти все её решения или доказать, что система решений не имеет.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Системы линейных уравнений

Пусть дана система
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

1. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$;
2. Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0 \\ b_1c_2 - b_2c_1 = 0 \end{cases}$$
3. Система не имеет решений тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ или $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Способы решения систем уравнений

- Графический способ
- Способ подстановки
- Способ сложения



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

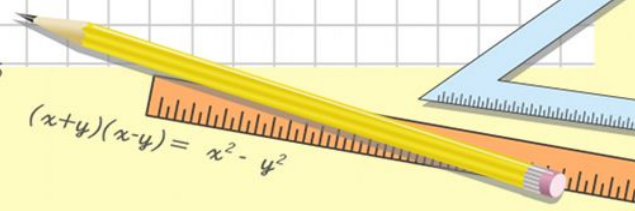
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



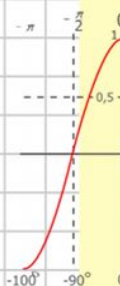
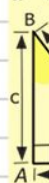
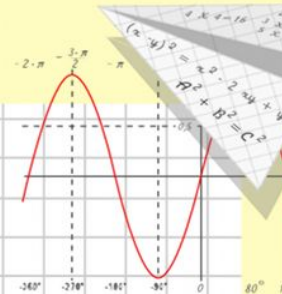
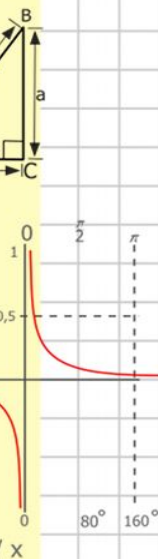
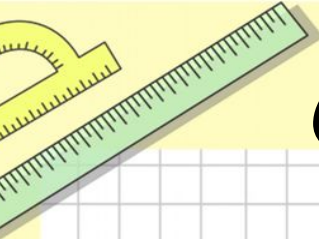
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$\frac{x = 70}{x = 70}$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



y =
2 x
3 x
4 x
5 x
6 x
7 x
8 x

Графический способ

Чтобы решить графическим способом систему двух уравнений с двумя переменными, нужно построить график каждого из уравнений системы и найти их точки пересечения.

Координаты каждой точки образуют решение системы.

Сколько точек пересечения - столько решений имеет система.

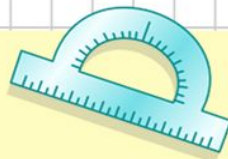


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



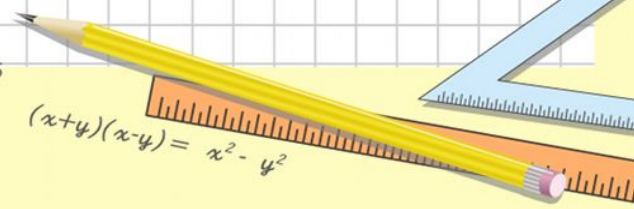
$$\sin 90^\circ = 1$$



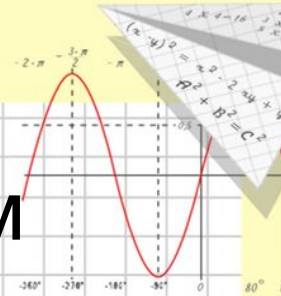
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



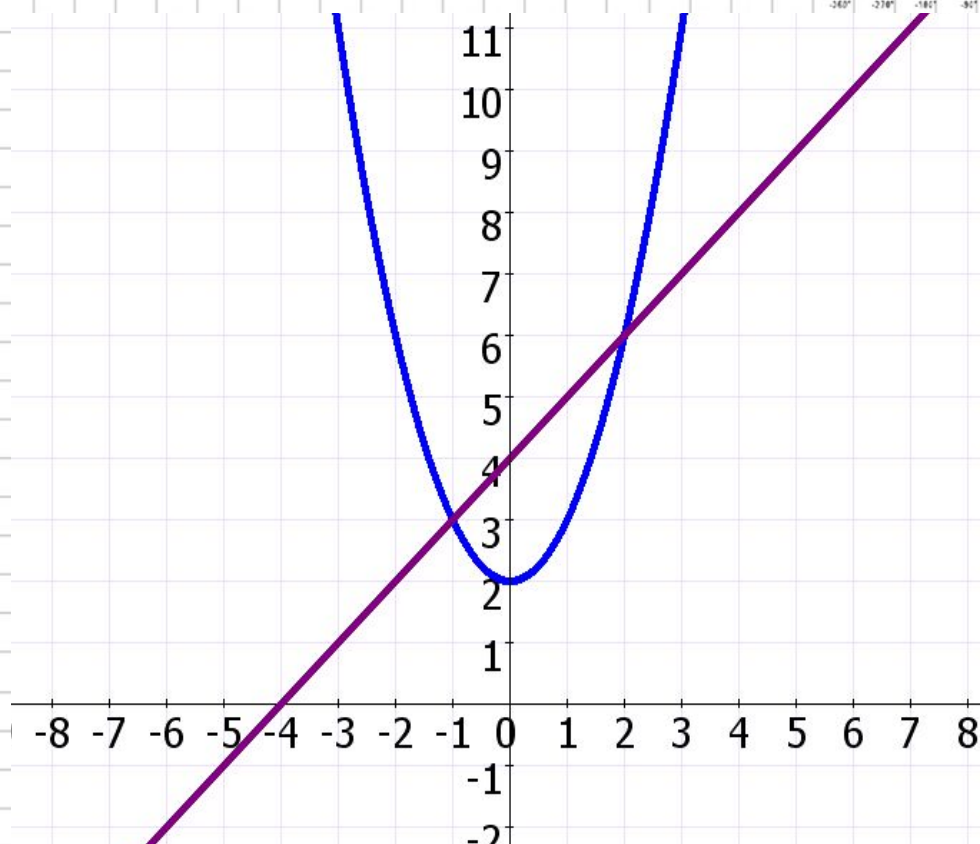
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{aligned} y &= \\ 2x & \\ 3x & \\ 4x & \\ 5x & \\ 6x & \\ 7x & \\ 8x & \end{aligned}$$

Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = x + 4 \end{cases}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



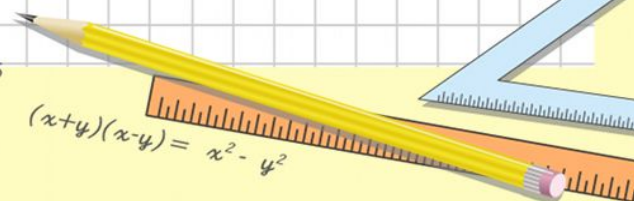
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Способ Подстановки

Заключается в том, что в одном из уравнений выражают одну переменную через другую. Полученное выражение подставляют в другое уравнение, которое после этого обращается в уравнение с одной переменной, а затем решают его. Получившиеся значения подставляют в любое уравнение исходной системы и находят вторую переменную.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



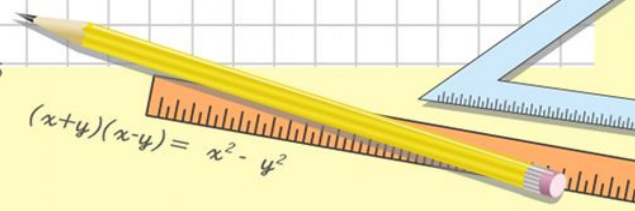
$$\sin 90^\circ = 1$$



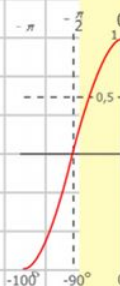
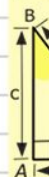
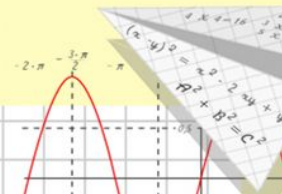
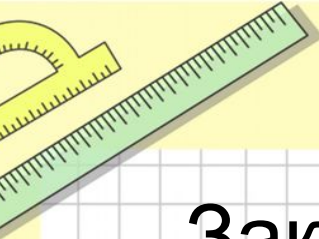
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{aligned} y &= \\ 2x & \\ 3x & \\ 4x & \\ 5x & \\ 6x & \\ 7x & \\ 8x & \end{aligned}$$

Решить систему уравнений способом подстановки

$$\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 7x - 2y = 31 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 7x - 2 \cdot (4 + 2x) &= \\ 31 \\ 7x - 8 - 4x &= 31 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = 4 + 2x \\ 7x - 2y = 31 \end{cases}$$

$$3x = 39$$

$$\begin{aligned} x &= 13 \\ y &= 4 + \end{aligned}$$

$$2 \cdot 13 = 30$$

Ответ : (13; 30)

Способ сложения

Заключается в том, что если данная система состоит из уравнений, которые при почленном сложении образуют уравнение с одной переменной, то, решив это уравнение, мы получим значения одной из переменных. Значения второй переменной находятся как и в способе подстановки.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решить систему уравнений способом сложения

$$\begin{cases} 4x - 7y = 30 \\ 4x - 5y = 90 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -4x + 7y = -30 \\ 4x - 5y = 90 \end{cases}$$

$$2y = 60$$

$$y = 30$$

Ответ: (60;30)

$$4x - 7 \cdot 30 = 30$$

$$4x - 210 = 30$$

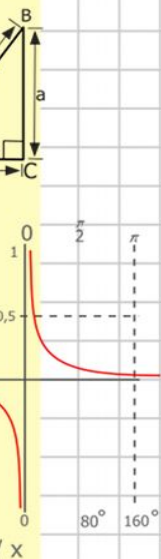
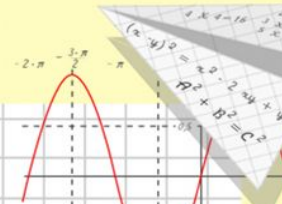
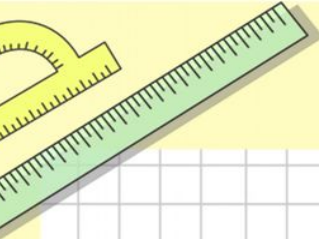
$$4x = 240$$

$$x = 60$$



Решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



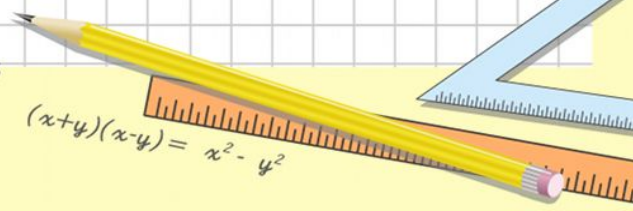
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решаем первое уравнение: перенесем z в правую часть и возведем обе части в квадрат

$$x + y = 4 - z,$$

$$(x + y)^2 = (4 - z)^2,$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 16 - 8z + z^2 \quad (1)$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



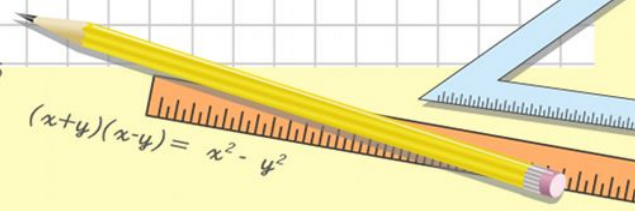
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Вычтем из уравнения (1) второе уравнение системы, умноженное на 2:

$$(x^2 + 2xy + y^2) - 2 \cdot (2xy - z^2) = (16 - 8z + z^2) - 2 \cdot 16$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4xy + 2z^2 = 16 - 8z + z^2 - 32,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + z^2 + 8z + 16 = 0,$$

$$(x - y)^2 + (z + 4)^2 = 0$$

Квадрат любого числа больше либо равен нулю. Поэтому сумма двух квадратов равна нулю только в том случае, если каждый из них равен нулю.

Получим:

$$x - y = 0$$

$$x = y$$

$$z + 4 = 0$$

$$z = -4$$

Подставим эти выражения в первое уравнение системы: $x + y + z = 4$

$$y + y - 4 = 4$$

$$2y = 8$$

$$y = 4$$

$$x = 4$$

Ответ: (4; 4; -

4)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin \theta \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Неравенства

Неравенством с одним неизвестным называется пара функций от одной и той же переменной, соединенная одним из знаков: $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, $\neq$.

Решением неравенства (системы неравенств) называется всякое действительное число, подстановка которого в неравенство (каждое неравенство системы) вместо каждого вхождения неизвестного (переменной) обращает это неравенство (все неравенства системы) в верное числовое неравенство (верные числовые неравенства).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

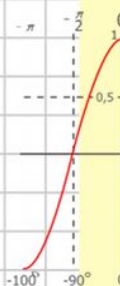
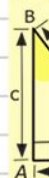
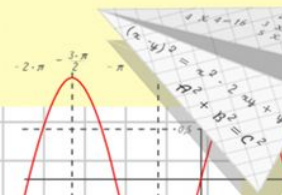
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решить неравенство (систему неравенств) значит найти множество всех решений этого неравенства (этой системы неравенств) или доказать, что оно (она) решений не имеет. Два неравенства (две системы неравенств) называются **равносильными**, если множества их решений совпадают. Соответственно, преобразования неравенства называются **равносильными**, если при этих преобразованиях множество решений полученного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.



$$\begin{aligned} y &= \\ 2x & \\ 3x & \\ 4x & \\ 5x & \\ 6x & \\ 7x & \\ 8x & \end{aligned}$$

$$\sin A = \sin B = \sin C$$

$$a+b = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$y = \sin 90$$

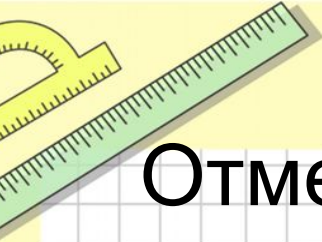
$$y = 1$$

$$x = 25 + 45$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Отметим, что проверка правильности всех найденных решений неравенства подстановкой в исходные неравенства в подавляющем большинстве случаев невозможна. Поэтому при решении неравенств (систем неравенств) нужно пользоваться равносильными преобразованиями (равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ). Нахождение ОДЗ не обязательно, если вы пользуетесь исключительно равносильными преобразованиями.



00
—
00

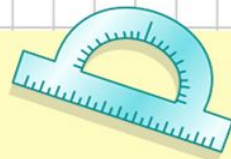


$$\sin A = \sin B = \sin C$$

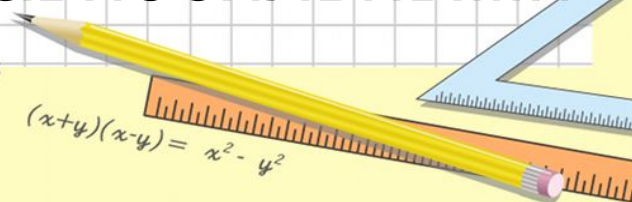
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$\underline{x = 70}$$



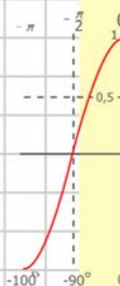
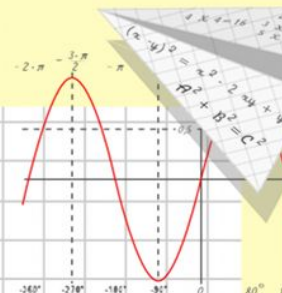
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



y =
2 x
3 x
4 x
5 x
6 x
7 x
8 x

В противном случае нахождение ОДЗ обязательно. При этом возможны два подхода к оформлению решения:

1. ОДЗ в виде неравенства или системы неравенств присоединяют к данному неравенству (данной системе) и полученную систему решают;
2. Находят ОДЗ. Решают данное неравенство (систему неравенств), пользуясь лишь равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ. Из полученных решений удаляют те, которые не входят в ОДЗ.



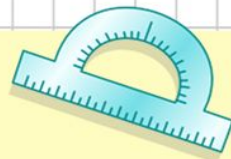
$$\begin{aligned} y &= \\ 2x & \\ 3x & \\ 4x & \\ 5x & \\ 6x & \\ 7x & \\ 8x & \end{aligned}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

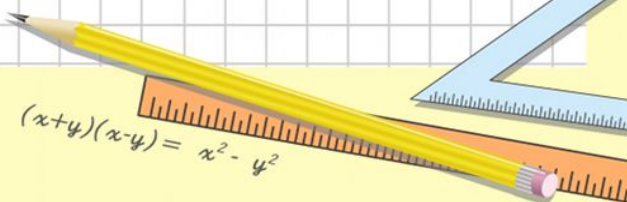
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 \geq 4, \\ (x+2)(6-x) \geq 0. \end{cases}$$

В ответ запишите сумму
целых решений.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$\frac{x}{70}$$

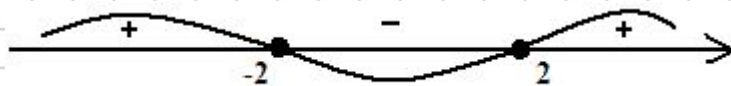
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решим оба неравенства системы методом интервалов.

$$x^2 \geq 4,$$

$$x^2 - 4 \geq 0,$$

$$(x - 2)(x + 2) \geq 0,$$



Решением этого неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Аналогично получим, что решением неравенства $(x+2)(6-x) \geq 0$ является отрезок $[-2;6]$.

Решением системы неравенств с одной переменной будет пересечение решений всех неравенств системы.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



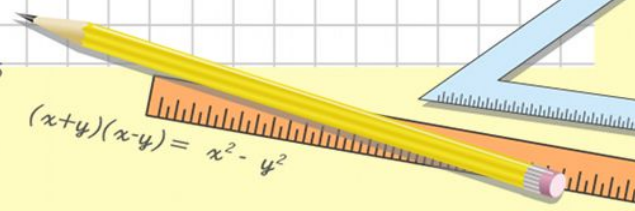
$$\sin 90^\circ = 1$$



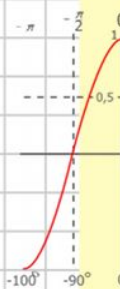
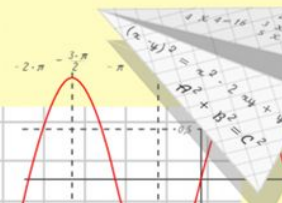
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

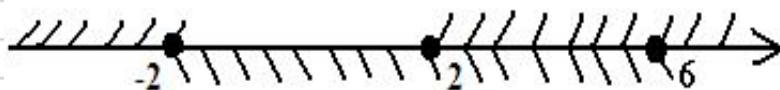


$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{aligned} y &= \\ 2x & \\ 3x & \\ 4x & \\ 5x & \\ 6x & \\ 7x & \\ 8x & \end{aligned}$$

Нанесем оба решения на одну числовую ось (сверху решение первого, снизу второго):



Пересечение решений это те точки на оси, у которых имеется двойная штриховка (снизу и сверху). Это множество, состоящее из числа -2 и отрезка $[2;6]$.

В этом множестве содержатся целые числа: -2, 2, 3, 4, 5 и 6. Их сумма равна 18.

Ответ: 18

Объединение неравенств

Отметим также, что очень часто решениями данного неравенства (системы неравенств) является объединение решений двух или более неравенств(систем неравенств). В таких случаях мы будем употреблять запись вида

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ h(x) < u(x) \end{cases}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Эту запись будем называть **объединением** неравенств. Решением объединения двух неравенств является всякое число, являющееся решением хотя бы одного из двух неравенств объединения. Иначе говоря, для решения объединения нужно найти множества всех решений первого и второго неравенств и найденные множества объединить.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решить объединение неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3x^3 - x^4 + 4x^2}{x^2 + x + 2} > 0, \\ \frac{x^2}{x^2 + x + 1} < 0. \end{array} \right.$$

В ответ запишите
наибольшее целое
решение.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решаем первое неравенство. Разложим числитель левой части на множители, используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители.

$$\frac{3x^3 - x^4 + 4x^2}{x^2 + x + 2} > 0,$$

$$\frac{x^2(-x^2 + 3x + 4)}{x^2 + x + 2} > 0,$$

$$\frac{-x^2(x + 1)(x - 4)}{x^2 + x + 2} > 0,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Умножим обе части на (-1) , знак
неравенства изменится на
противоположный:

$$\frac{x^2(x+1)(x-4)}{x^2+x+2} < 0.$$

Квадратный трехчлен $x^2+x+2>0$, т.к.
отрицательный дискриминант и
положительный старший коэффициент
(число, стоящее перед x^2).



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



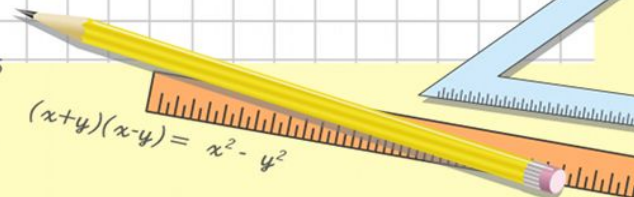
$$\sin 90^\circ = 1$$



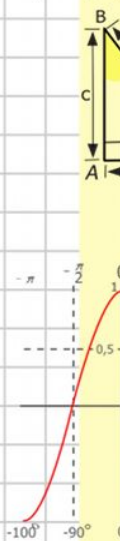
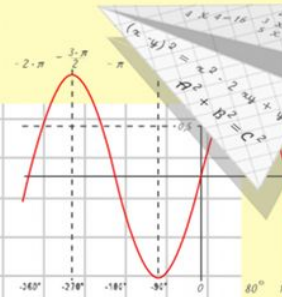
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{aligned} y &= \\ 2x & \\ 3x & \\ 4x & \\ 5x & \\ 6x & \\ 7x & \\ 8x & \end{aligned}$$

Если умножить на него левую и правую часть неравенства, то получим равносильное неравенство:

$$x^2(x+1)(x-4) < 0.$$

Решив его методом интервалов, получим ответ:

$$(-1; 0) \cup (0; 4).$$

Решаем второе неравенство.

$$\frac{x^2}{x^2 + x + 1} < 0.$$

Рассуждая также, как и в первом неравенстве, приходим к выводу, что $x^2 + x + 1 > 0$ для всех x и на него можно умножить левую и правую части неравенства.

Получим неравенство:

$$x^2 < 0$$

Данное неравенство не имеет решений,
так как квадрат любого числа
неотрицательный.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



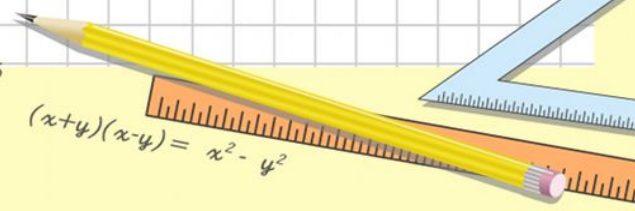
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Значит, второе неравенство совокупности решений не имеет. Поэтому решение совокупности совпадает с решением первого неравенства:
 $(-1; 0) \cup (0; 4)$.

Наибольшее целое решение — число 3.

Ответ: 3.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Рациональные неравенства

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к неравенству вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$$

или вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

где $P(x)$, $Q(x)$ - некоторые многочлены.

Поскольку

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \times Q(x) > 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \times Q(x) \geq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

то для решения рациональных
неравенств удобно применять метод
интервалов.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

При преобразованиях выражений и, в частности, при разложении их на множители иногда помогают **формулы сокращенного умножения**:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{ — квадрат суммы;}$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \text{ — квадрат разности;}$$

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \text{ — разность квадратов;}$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \text{ — куб суммы;}$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \text{ — куб разности;}$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3 \text{ — сумма кубов;}$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3 \text{ — разность кубов.}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решение неравенства методом интервалов

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2} \leq 0.$$

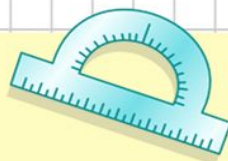


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



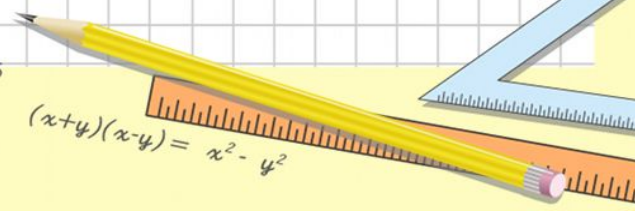
$$\sin 90^\circ = 1$$



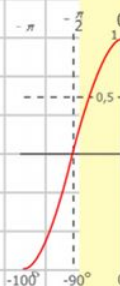
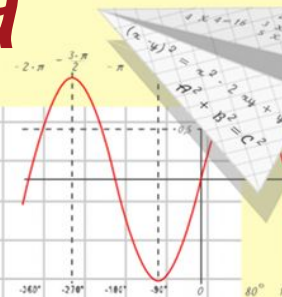
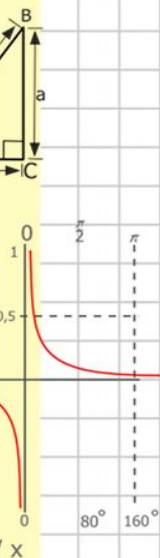
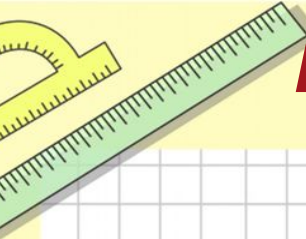
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$y =$$
$$2x$$
$$3x$$
$$4x$$
$$5x$$
$$6x$$
$$7x$$
$$8x$$

Разложим числитель левой части
неравенства на скобки.

Для этого найдем решения уравнения

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x_1 = -4, x_2 = 2.$$

Мы получим разложение на множители:

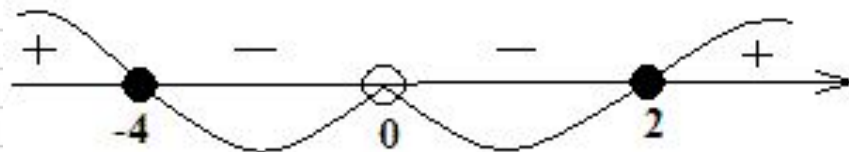
$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2).$$

$$\frac{(x+4)(x-2)}{x^2} \leq 0.$$

Найдем нули числителя и знаменателя:

$$x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = 0.$$

Нанесем эти числа на ось, при этом нули знаменателя будут выколотыми точками, а нули числителя нет.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

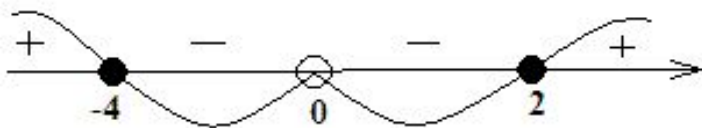
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Расставим знаки на каждом интервале, с учетом того, что x_2 всегда больше или равен нулю. В результате должно получиться то, что изображено на рисунке выше.

Поскольку знак неравенства $\leq$, то мы выбираем те интервалы, над которыми стоит знак "-".

Записываем решение неравенства

$$[-4; 0) \cup (0; 2]$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Показательные уравнения и неравенства

Стандартный способ решения *простейших показательных* уравнений и неравенств основывается на монотонности показательной функции, из которой получается следующее основное *правило отбрасывания оснований*:
пусть $a > 1$, тогда уравнение или неравенство a^f
 $\vee a^g$ равносильно уравнению или неравенству $f \vee g$, где $\vee$ - это $>, \geq, <, \leq$.

В этом правиле последнее уравнение или неравенство имеет тот же знак $\vee$, что и первое, так как показательная функция с основанием $a > 1$ возрастает.

$$\sin A = \sin B = \sin C$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

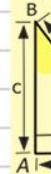
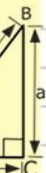
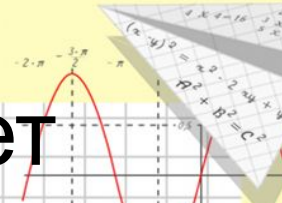
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Если же основание a удовлетворяет неравенствам $0 < a < 1$, то в сформулированный переход необходимо внести поправку, **поменяв в конце знак на обратный**, а именно: $>$ на $<$, знак $\geq$ на $\leq$ и.т.д., но знак $=$ (как и знак $\neq$) при этом не меняется вовсе. Все дело в том, что показательная функция с основанием, меньшим единицы, уже не возрастает, а убывает.

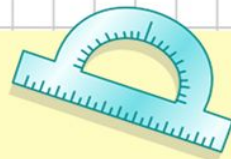


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

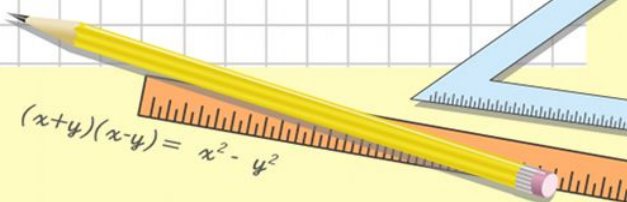
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$\frac{x = 70}{}$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Для приведения
исходного
показательного
уравнения или
неравенства к
нужному виду могут
пригодиться
следующие
формулы действий
со степенями ($a, b > 0$):

$$a^0 = 1, \quad 1^x = 1;$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \quad (k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N});$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x;$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

К неравенствам вида $(a^f - a^g) \cdot x \cdot h > 0$ применим **метод замены множителя**, позволяющий сильно упростить выражение в скобках и состоящий в следующем: пусть $a > 1$, тогда множитель $a^f - a^g$ можно заменить множителем $f - g$ того же знака.

При указанной замене сохраняется каждое из трех возможных событий: положительность множителя, его отрицательность и равенство его нулю. В случае $0 < a < 1$ тот же множитель $a^f - a^g$ можно заменить противоположным множителем $g - f$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решение показательного неравенства

$$\frac{1}{3} \frac{2x+3}{3x-1} \leq \frac{1}{3} \frac{4x-7}{6x+5}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

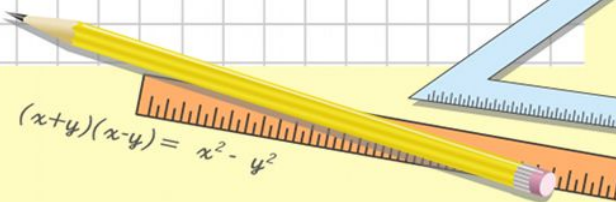
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



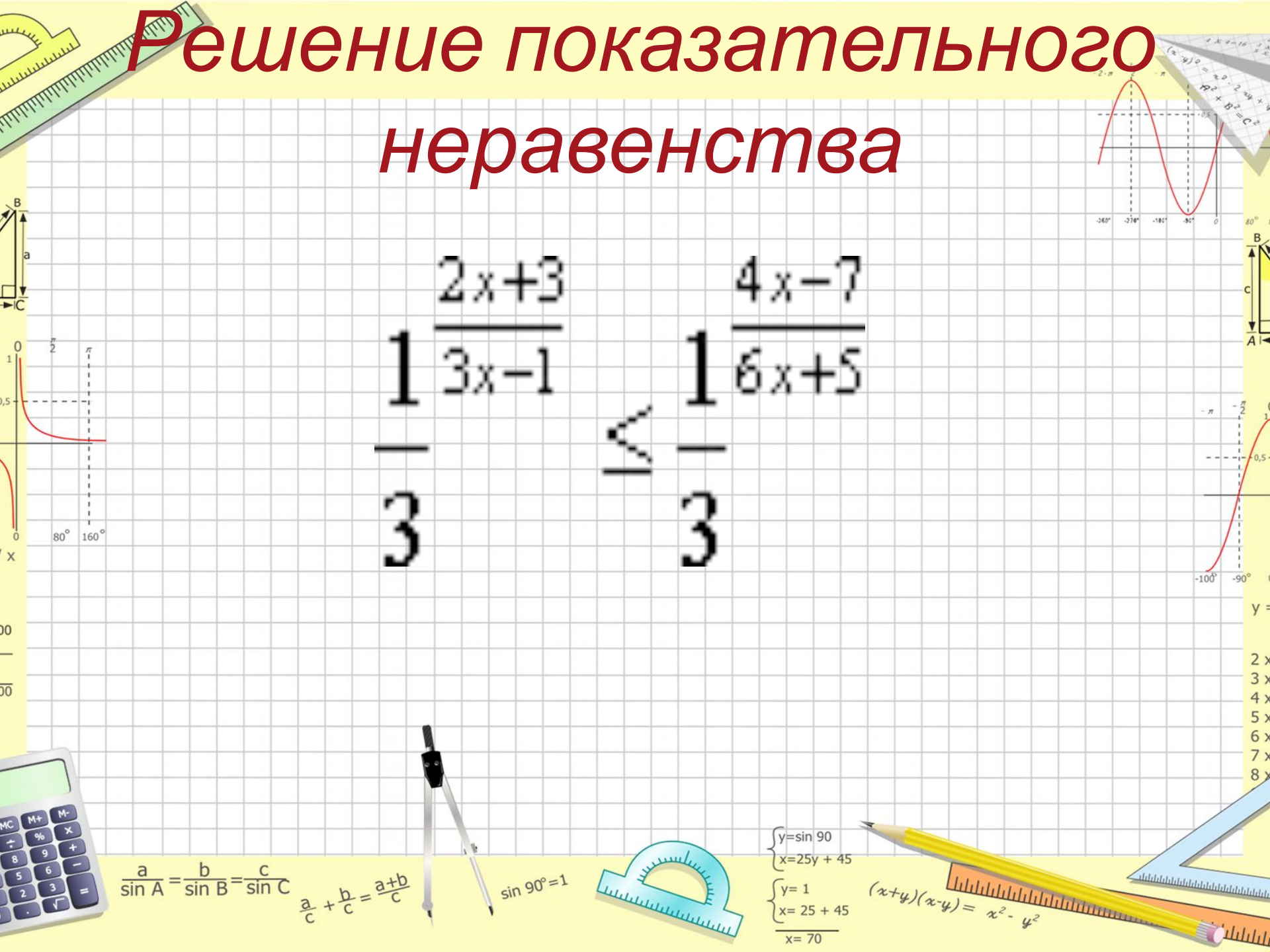
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$\frac{x = 70}{x = 70}$$

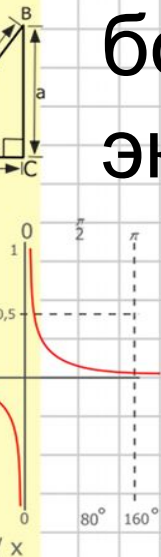
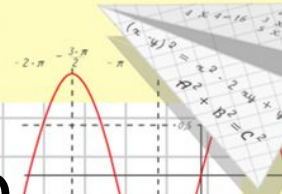


$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Так как основание меньше единицы, но больше нуля, то наше неравенство эквивалентно неравенству:

$$\frac{2x+3}{3x-1} \geq \frac{4x-7}{6x+5}$$

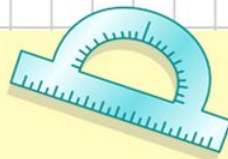


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

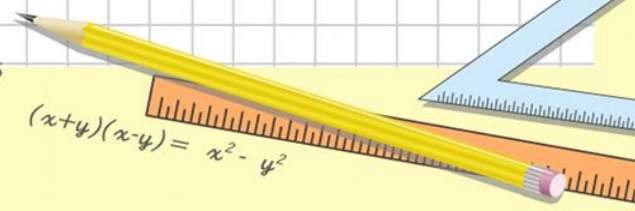
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$\frac{x}{x} = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Перенесем все в левую часть, приведем к общему знаменателю. Решим неравенство методом интервалов, получим ответ:

$$\frac{(2x+3)(6x+5)-(4x-7)(3x-1)}{(3x-1)(6x+5)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{53x+8}{(3x-1)(6x+5)} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{6}, -\frac{8}{53}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Логарифмические уравнения и неравенства

Стандартный метод решения *простейших логарифмических* уравнений и неравенств опирается на монотонность логарифмической функции, т.е. на следующее основное *правило отбрасывания логарифмов*: пусть $a > 1$, тогда уравнение или неравенство $\log_a f > \log_a g$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f > g \\ f, g > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

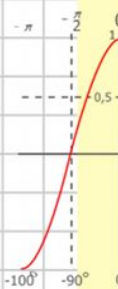
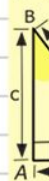
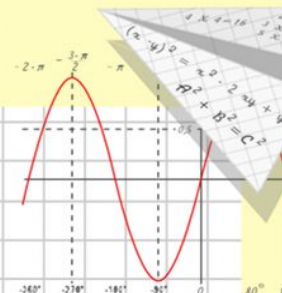
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

В случае $0 < a < 1$, неравенстве $f \vee g$ итоговой системе необходимо заменить неравенством $f \wedge g$, так как логарифмическая функция с таким основанием a убывает.

Если же основание логарифма не есть константа, то отдельно разбираются случаи, когда оно больше единицы и когда меньше.



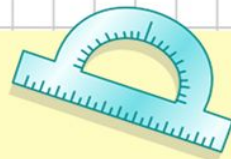
$y =$
 $2x$
 $3x$
 $4x$
 $5x$
 $6x$
 $7x$
 $8x$



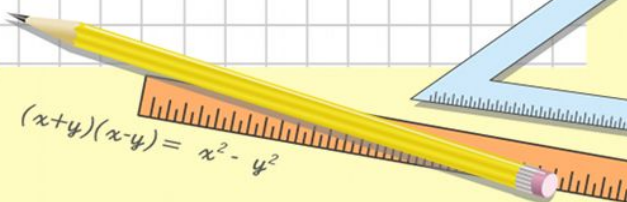
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$\frac{x = 70}{}$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Для того чтобы отбросить логарифмы в уравнении или неравенстве $\log_a f \vee g$, его правую часть можно представить в нужном виде с помощью тождества:

$$g = \log_a(a^g)$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



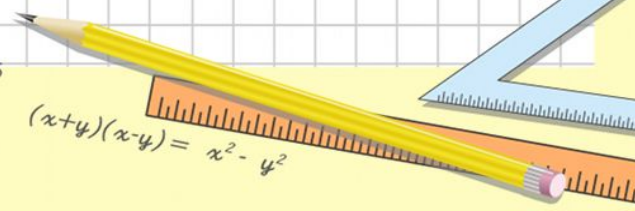
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Для приведения исходного логарифмического уравнения или неравенства к нужному виду могут пригодиться следующие **формулы действий**

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1;$$

$$a^{\log_a x} = x \text{ — основное логарифмическое тождество;}$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy) \text{ — логарифм произведения;}$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \text{ — логарифм частного;}$$

$$p \log_a x = \log_a (x^p) \text{ — логарифм степени;}$$

$$\frac{p}{q} \log_a x = \log_{(a^q)} (x^p) \quad (q \neq 0);$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ — формула перехода к новому основанию;}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

логарифмического уравнения

$$\log_{x-1} 25 = 2$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



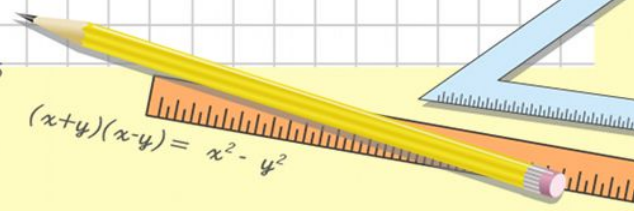
$$\sin 90^\circ = 1$$



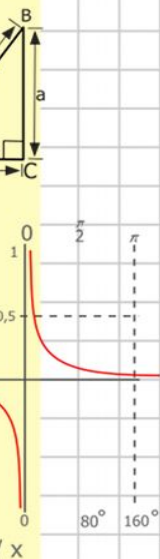
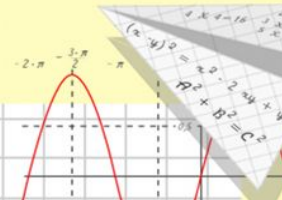
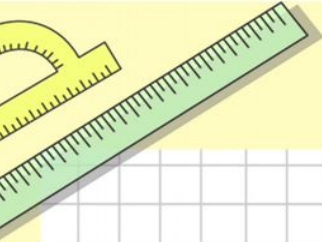
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$y =$$
$$\begin{matrix} 2x \\ 3x \\ 4x \\ 5x \\ 6x \\ 7x \\ 8x \end{matrix}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} X - 1 \neq 1 \\ X - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \neq 2 \\ X > 1 \end{cases}$$

Воспользуемся основным
логарифмическим тождеством:

$$(x - 1)^2 = 25$$

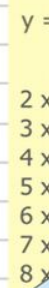
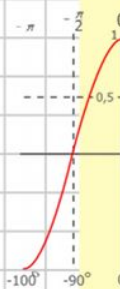
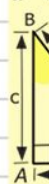
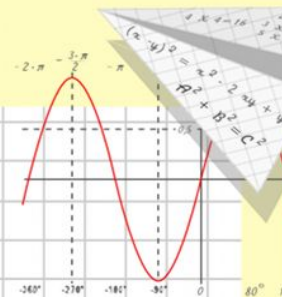
$$X^2 - 2x + 1 = 25$$

$$X^2 - 2x - 24 = 0$$

$$X_1 = 6 \quad X_2 = -4 \text{ (не принадлежит ОДЗ)}$$

К неравенствам вида $(\log_a f - \log_a g) \times h > 0$ также применим **метод замены множителя**: пусть $a > 1$ тогда $\log_a f - \log_a g$ эль можно заменить множителем $f-g$ того же знака при дополнительных условиях $a, f, g > 0$ и $a \neq 1$.

Важный частный случай этой замены получается при подстановке в ней $g=1$: пусть $a > 1$, тогда множ $\log_a f$ эль можно заменить множителем $f-1$ при $f > 0$.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

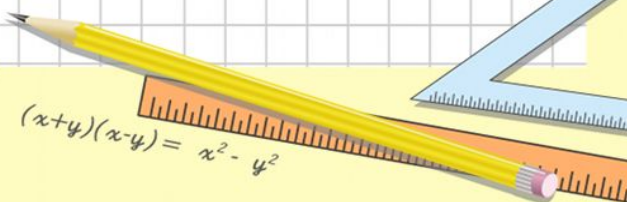
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Опять же, в случае $0 < a < 1$ множитель $\log_a f - \log_a g$ можно заменить $\log_a f$ противоположным множителем $g-f$ при $g, f, a > 0$ и $a \neq 1$, а множитель противоположным множителем $1-f$ при $f > 0$.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



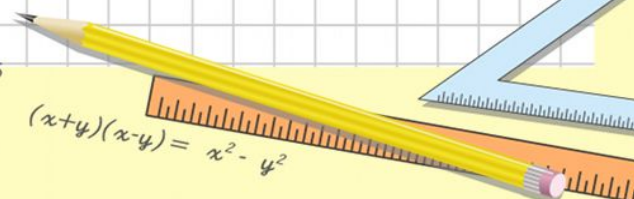
$$\sin 90^\circ = 1$$



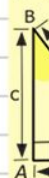
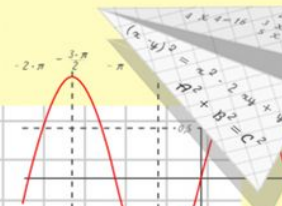
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{aligned} y &= \\ 2x & \\ 3x & \\ 4x & \\ 5x & \\ 6x & \\ 7x & \\ 8x & \end{aligned}$$

логарифмического неравенства

$$\frac{1}{2} \log_{4+x}(x^2 + 2x + 1) + \log_{-x-1}(-x^2 - 5x - 4) \leq 3$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



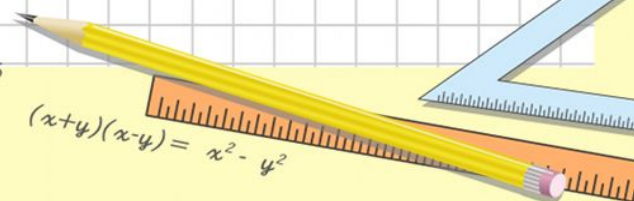
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

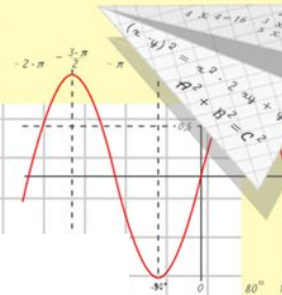
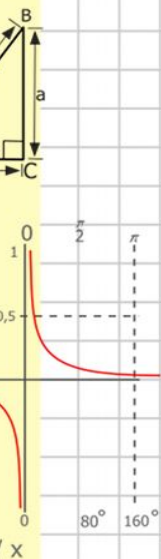
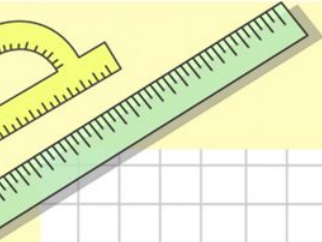
$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 + 2x + 1 > 0, \\ -x^2 - 5x - 4 > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1, \\ -x - 1 > 0, \\ -x - 1 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4, \\ x \neq -3, \\ x < -1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

$$x \in (-4; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; -1).$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



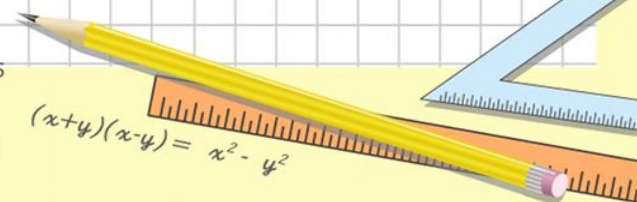
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

На ОДЗ неравенство примет вид:

$$\log_{4+x} |x+1| + \log_{-x-1} ((-x-1)(x+4)) \leq 3;$$

$$\log_{4+x} (-x-1) + \log_{-x-1} (-x-1) + \log_{-x-1} (x+4) \leq 3;$$

$$\log_{x+4} (-x-1) + \frac{1}{\log_{x+4} (-x-1)} - 2 \leq 0;$$

$$\frac{\log_{x+4}^2 (-x-1) - 2 \log_{x+4} (-x-1) + 1}{\log_{x+4} (-x-1)} \leq 0;$$

$$\frac{(\log_{x+4} (-x-1) - 1)^2}{\log_{x+4} (-x-1)} \leq 0; \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_{x+4} (-x-1) - 1 = 0, \\ \log_{x+4} (-x-1) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 = x+4, \\ 0 < x+4 < 1, \\ -x-1 > 1, \\ x+4 > 1, \\ -x-1 < 1; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2,5, \\ -4 < x < -3, \\ x < -2, \\ x > -3, \\ x > -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2,5, \\ -4 < x < -3, \\ x > -2. \end{cases}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 30^\circ \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

С учётом ОДЗ получаем: $x \in (-4; -3) \cup \{-2,5\} \cup (-2; -1)$.

Ответ: $(-4; -3) \cup \{-2,5\} \cup (-2; -1)$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$\frac{x = 70}{x = 70}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Иррациональные уравнения и неравенства

Для избавления от радикалов в *иррациональных* уравнениях или неравенствах требуется, прежде всего, умение возводить обе части в квадрат. Делается это с помощью следующего основного *правила возведения в квадрат*, базирующегося на возрастании простейшей квадратичной функции на положительной полуоси.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Пусть $f, g \geq 0$, тогда уравнение или неравенство $\sqrt{f} = \sqrt{g}$ равносильно уравнению или неравенству $f = g^2$.

Это правило не распространяется на те случаи, в которых хотя бы одна из частей уравнения или неравенства отрицательна, - их нужно рассматривать отдельно.

Что же касается возведения в квадрат неравенств, то тут ситуация гораздо серьезнее: несоблюдение основного правила может привести как к приобретению, так и к потере решений.

$$\sin A = \sin B = \sin C$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Преобразования иррациональных уравнений или неравенств производится по следующим *формулам действий с арифметическими корнями* $\in (x, y \geq 0; n, m \in \mathbb{N} \text{ и } k \in \mathbb{Z})$:

$$\sqrt[n]{1} = 1, \quad \sqrt[n]{0} = 0;$$

$$(\sqrt[n]{x})^n = x;$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \text{ — корень из произведения;}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (y \neq 0) \text{ — корень из дроби;}$$

$$\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k \text{ — корень из степени;}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x} \text{ — корень из корня;}$$

$$\sqrt[nm]{x^{km}} = \sqrt[n]{x^k} \text{ — правило сокращения.}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

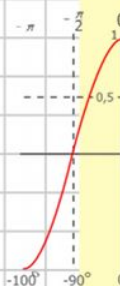
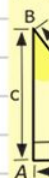
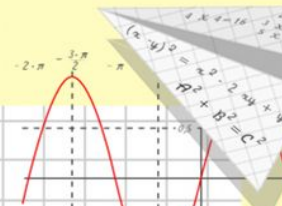
$$\begin{cases} y = \sin 90^\circ \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Корни четной степени извлекаются только из **неотрицательных чисел**. Поэтому, действуя по приведенным формулам, например, с квадратными корнями, нужно аккуратно отслеживать возможное расширение ОДЗ уравнения или неравенства и, главное, не допускать ее сужения.



$y =$
 $2x$
 $3x$
 $4x$
 $5x$
 $6x$
 $7x$
 $8x$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



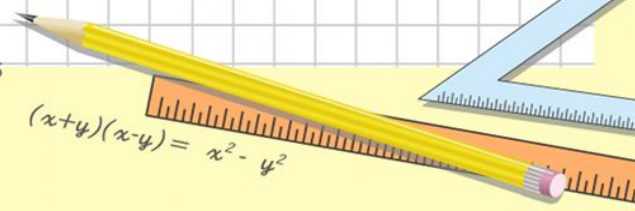
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решение иррационального уравнения

$$\sqrt{X^2 + X + 4} + \sqrt{X^2 + X + 1} = \sqrt{2X^2 + 2X + 9} \quad (1)$$

Введем новую переменную $X^2 + X = U$, тогда уравнение (1) примет вид $\sqrt{U+4} + \sqrt{U+1} = \sqrt{2U+9}$ (2)

Т.к. выражение под знаком корня всегда больше или равно нулю то $U \geq -1$.

Возведем обе части уравнения в квадрат получим:

$$U+4 + U+1 + 2\sqrt{(U+4)(U+1)} = 2U+9$$

$$2\sqrt{(U+4)(U+1)} = 4$$

$$\sqrt{(U+4)(U+1)} = 2$$

$$(U+4)(U+1) = 4$$

$$U^2 + 5U + 4 = 4$$

$$U^2 + 5U = 0$$

$$U(U+5) = 0$$

$$U_1 = -5 \quad U_2 = 0$$

Т.к. $U \geq -1$ то значение $U_1 = -5$ не подходит. Теперь подставим значение U , получим что $X^2 + X = 0$;

$$X(X+1) = 0$$

$$U_1 = -1 \quad U_2 = 0$$

Проверим подстановкой удовлетворяют ли найденные корни исходному уравнению. Убеждаемся что $X_1 = -1$; $X_2 = 0$ удовлетворяют уравнению.

Ответ: -1; 0

К неравенствам вида $(\sqrt{f} - \sqrt{g}) \times h > 0$ также применим **метод замены множителя**, вытекающий из основного правила возведения в квадрат и состоящий в следующем: $\sqrt{f} - \sqrt{g}$ можно заменить множителем $f - g$ того же знака при дополнительных условиях $f, g \geq 0$.

Важный частный случай этой замены получается в результате подстановки в ней $g = 0$: множи $\sqrt{f}$ можно заменить множителем f при $f \geq 0$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Решение иррационального неравенства

$$2 \frac{\sqrt{x(2x^2 - 22x + 60)}}{6 - x} \geq 20 - 4x$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



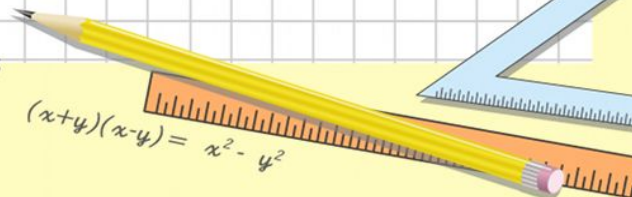
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 6, 2x^3 - 22x^2 + 60x = 2x(x - 6)(x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in [0; 5] \cup (6; +\infty).$$

Заметим, что в ОДЗ $x \geq 0$, поэтому существует

и значит

$$\frac{\sqrt{2x(x-5)(x-6)}}{x-6} \leq 2(x-5) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x(x-5)(x-6)} - 2(x-5)(x-6)}{(x-6)} =$$

$$\frac{\sqrt{2x(x-5)(x-6)} - \sqrt{4(x-5)^2(x-6)^2}}{(x-6)} = \sqrt{(x-5)(x-6)} \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt{4(x-5)(x-6)})}{(x-6)} \leq 0.$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Мы воспользовались здесь тем, что в ОДЗ $x \geq 0$, $(x - 5)(x - 6) \geq 0$ и потому существуют выписанные в последней строчке корни. Кроме того, мы вынесли за скобку $\sqrt{(x - 5)(x - 6)}$, который по вышесказанному существует. Этот корень неотрицателен и потому не влияет на знак неравенства, следовательно, на него можно сократить, не забывая, что он может ещё обратиться в нуль и те x , для которых корень обращается в нуль, являются решениями неравенства. Таким образом, в ответ необходимо включить число $x = 5$. При $x = 6$ корень обращается в нуль, но $x = 6$ не входит в ОДЗ неравенства. Воспользуемся теперь тем, что знак разности корней совпадает со знаком разности подкоренных выражений.

$$\sin A = \sin B = \sin C$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Имеем:

$$\sqrt{(x-5)(x-6)} \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt{4(x-5)(x-6)})}{(x-6)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ \frac{2x - 4(x-5)(x-6)}{x-6} \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ \frac{2(x-4)\left(x - \frac{15}{2}\right)}{x-6} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ x \in [4; 6) \cup \left[\frac{15}{2}; +\infty\right); \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4; 6) \cup \left[\frac{15}{2}; +\infty\right).$$

С учетом ОДЗ получаем
ответ:

$$x \in [4; 5] \cup \left[\frac{15}{2}; +\infty\right)$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 90^\circ \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Уравнения и неравенства с модулем

Стандартное *правило раскрытия модуля* основывается на его определении:

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Раскрывая сразу несколько модулей, приходится разбирать случаи, которые задаются знаками выражений, стоящих под модулем. Однако, если количество модулей велико, то велико и число разбираемых случаев.

Его можно заметно сократить за счет применения *метода интервалов*.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



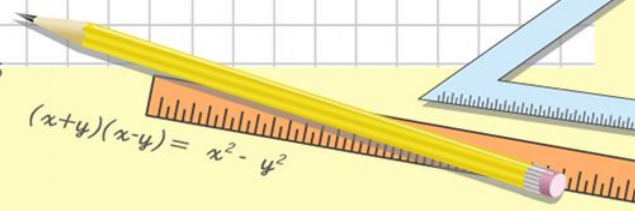
$$\sin 90^\circ = 1$$



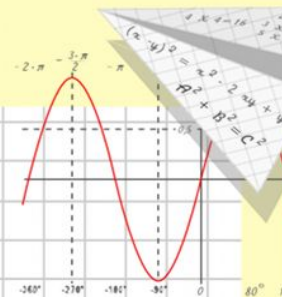
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{aligned} y &= \\ 2x & \\ 3x & \\ 4x & \\ 5x & \\ 6x & \\ 7x & \\ 8x & \end{aligned}$$

Другой подход, напоминающий скорее не раскрытие, а **отбрасывание** модулей, применим к простейшим уравнениям и неравенствам вида $|f| = |g|$ или $|f| \leq g$.

Он использует **геометрический смысл** модуля, состоящий в том, что модуль $|x|$ численно равен расстоянию на числовой прямой от точки x до точки 0 .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Исходя из этого смысла, можно установить справедливость, например, таких утверждений:

- уравнение $|f|=|g|$ равносильно совокупности $f=\pm g$;
- уравнение $|f|=g$ равносильно системе $f=\pm g; g\geq 0$;
- неравенство $|f|<g$ равносильно двойному неравенству $-g<f<g$;
- неравенство $|f|>g$ равносильно совокупности $f>g; f<-g$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Полезную роль при преобразовании выражений могут сыграть следующие *свойства* модулей:

$$|x|^2 = x^2;$$

$$|x| = \sqrt{x^2};$$

$$|xy| = |x| \cdot |y| \text{ — модуль произведения;}$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0) \text{ — модуль дроби;}$$

$$|x| \geq x;$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \text{ — неравенство треугольника}^1;$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y||.$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

К неравенствам вида $(|f| - |g|)xh < 0$
 также применим *метод замены*
множителя: множитель $|f| - |g|$ можно
 заменить множителем $f^2 - g^2$ того же
 знака.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



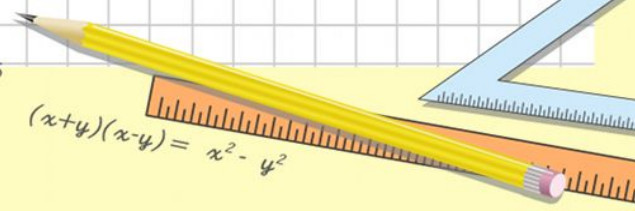
$$\sin 90^\circ = 1$$



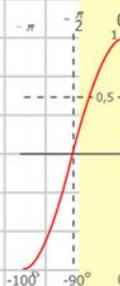
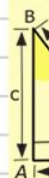
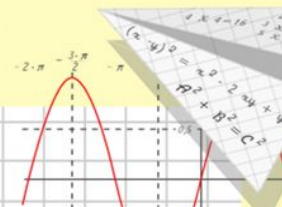
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$\frac{x = 70}{x = 70}$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

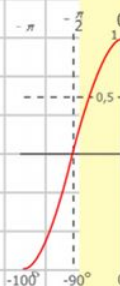
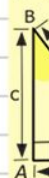
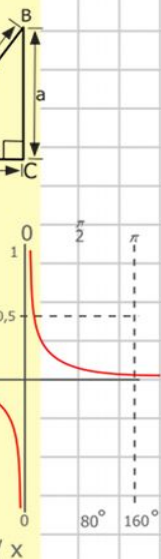
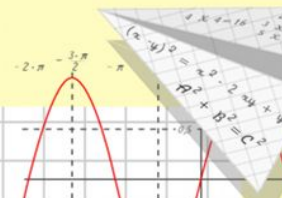
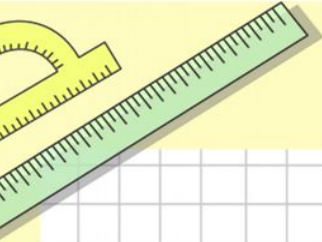


$$y =$$

$$\begin{matrix} 2x \\ 3x \\ 4x \\ 5x \\ 6x \\ 7x \\ 8x \end{matrix}$$

Решение уравнения с модулем

$$|x - 1| - 2|x + 2| = 0$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

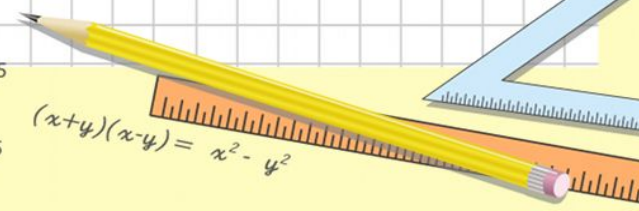


$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$\underline{x = 70}$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Найдем точки перемены знака модуля из условий:

$$x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 1$$

$$x = -2$$

Рассмотрим данное уравнение на промежутках

$$(-\infty; -2], \quad [-2; 1], \quad [1; +\infty)$$

На промежутке $(-\infty; -2]$ уравнение имеет вид:

$$(-x + 1) - 2 \cdot (-x - 2) = 0$$

$$-x + 1 + 2x + 4 = 0$$

$$x + 5 = 0$$

$$x = -5$$

- 5 принадлежит промежутку $(-\infty; -2]$

На промежутке $[-2;1]$ уравнение имеет вид:

$$(-x + 1) - 2 \cdot (x + 2) = 0$$

$$-x + 1 - 2x - 4 = 0$$

$$-3x - 3 = 0$$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

- 1 принадлежит промежутку $[-2;1]$

На промежутке $[1; +\infty)$ уравнение имеет вид:

$$(x - 1) - 2 \cdot (x + 2) = 0$$

$$x - 1 - 2x - 4 = 0$$

$$-x - 5 = 0$$

$$x = -5$$

- 5 не принадлежит промежутку $[1; +\infty)$

Ответ: $x = -5, -1$

Решение неравенства с модулем

$$|x^3 - x - 1| - 5 \geq x^3 + x + 8.$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



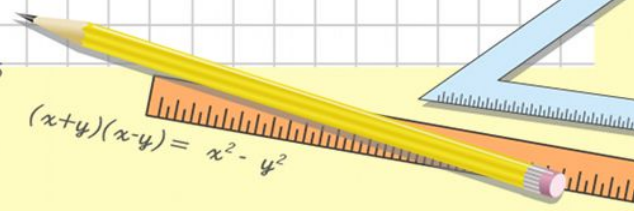
$$\sin 90^\circ = 1$$



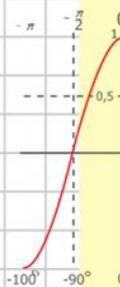
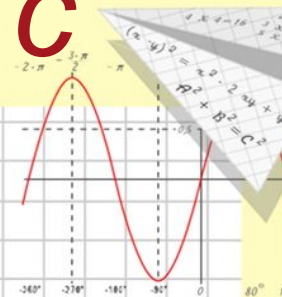
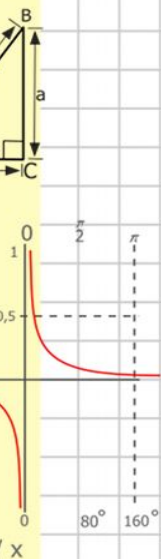
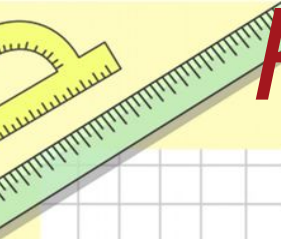
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{aligned} y &= \\ 2x & \\ 3x & \\ 4x & \\ 5x & \\ 6x & \\ 7x & \\ 8x & \end{aligned}$$

Как видно, найти значения x , при которых подмодульное выражение обращается в нуль, чрезвычайно затруднительно. Однако переход к равносильной системе значительно упрощает дело. Имеем:

$$|x^3 - x - 1| - 5 \geq x^3 + x + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 - x - 1| - 5 \geq x^3 + x + 8, \\ |x^3 - x - 1| - 5 \leq -x^3 - x - 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 - x - 1| \geq x^3 + x + 13, \\ |x^3 - x - 1| \leq -x^3 - x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^3 - x - 1 \geq x^3 + x + 13, \\ x^3 - x - 1 \leq -x^3 - x - 13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -7, \\ x \leq -\sqrt[3]{6}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt[3]{6}, \\ x \leq -2; \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt[3]{6}.$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$