

Вычисление наибольших
и наименьших значений
функций

без применения
производной.

11 класс.

1 вариант

№1. Какое из чисел входит во множество

значений функции $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x - 12$?

1) -12; 2) -18; 3) -20; 4) -11.

№2. Укажите функцию, областью значений которой является промежуток $(0; +\infty)$

1) $f(x) = \sin x$; 2) $g(x) = \sqrt[6]{x}$;
3) $h(x) = \lg x$; 4) $p(x) = 10^x$.

2 вариант

№1. Какое из чисел входит во множество

значений функции $y = 0,5^x + 2$?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 0.

№2. Укажите функцию, областью значений которой является промежуток $[0; +\infty)$

1) $f(x) = \cos x$; 2) $g(x) = \sqrt[8]{x}$;
3) $h(x) = \ln x$; 4) $p(x) = 7^x$.

1 вариант

- №3.** Найдите множество значений функции $y = 4 \sin x + 1$.
- №4.** Найдите множество значений функции $y = 5 \cos x - 3 \sin x$.
- №5.** Найдите наибольшее значение функции $g(x) = \log_2(16 - x^2)$.

2 вариант

- №3.** Найдите множество значений функции $y = 2 \cos x - 1$.
- №4.** Найдите множество значений функции $y = 2 \cos x + 5 \sin x$.
- №5.** Найдите наименьшее значение функции $h(x) = 4^{3x^2+2}$.

ОТВЕТЫ.

№1. Какое из чисел входит во множество

значений функции $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x - 12$?

- 1) -12; 2) -18; 3) -20; **4) -11.**

№2. Укажите функцию, областью значений которой является промежуток $(0; +\infty)$

- 1) $f(x) = \sin x$; 2) $g(x) = \sqrt[6]{x}$;
3) $h(x) = \lg x$; **4) $p(x) = 10^x$.**

№1. Какое из чисел входит во множество

значений функции $y = 0,5^x + 2$?

- 1) 1; 2) 2; **3) 3;** 4) 0.

№2. Укажите функцию, областью значений которой является промежуток $[0; +\infty)$

- 1) $f(x) = \cos x$; **2) $g(x) = \sqrt[8]{x}$;**
3) $h(x) = \ln x$; 4) $p(x) = 7^x$.

Ответ.

№3. Найдите множество значений функции $y = 4 \sin x + 1$.

Ответ: $[-3; 5]$

№4. Найдите множество значений функции $y = 5 \cos x - 3 \sin x$.

Ответ: $[-\sqrt{34}; \sqrt{34}]$

№5. Найдите наибольшее значение функции $q(x) = \log_2(16 - x^2)$.

Ответ: **4.**

№3. Найдите множество значений функции $y = 2 \cos x - 1$.

Ответ: $[-3; 1]$

№4. Найдите множество значений функции $y = 2 \cos x + 5 \sin x$.

Ответ: $[-\sqrt{29}; \sqrt{29}]$

№5. Найдите наименьшее значение функции $h(x) = 4^{3x^2+2}$.

Ответ: **16.**

Задание №1.

1 вариант

А. Найти наименьшее значение

функции: $y = 2 \cdot 9^x - 3^{x+1} + 1$

Б. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 4\cos 2x + 8\cos x - 11$$

2 вариант

А. Найти наименьшее значение

функции: $y = 4 \cdot 4^x - 2 \cdot 2^{x+1} - 1$

Б. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 2\cos 2x - 4\sin x + 4$$

С. Найдите сумму натуральных значений функции

$$y = \log_3 (65 + 8 \cdot 3^{|x|} - 9^{|x|})$$

1 вариант.

А. Найти наименьшее значение функции

$$y = 2 \cdot 9^x - 3^{x+1} + 1$$

Решение.

$$y = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 1$$

Пусть $3^x = t, t > 0$

Функция примет вид:

$$y = 2t^2 - 3t + 1$$

$$t_0 = \frac{3}{4}$$

$$y_0 = -\frac{1}{8}$$

Ответ: $y_{\text{наим.}} = -\frac{1}{8}$

2 вариант.

А. Найти наименьшее значение функции

$$y = 4 \cdot 4^x - 2 \cdot 2^{x+1} - 1$$

Решение.

$$y = 4 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1$$

Пусть $2^x = t > 0$

Функция примет вид:

$$y = 4t^2 - 4t - 1$$

$$t_0 = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = -2$$

Ответ: $y_{\text{наим.}} = -2$

1 вариант

Б. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 4 \cos 2x + 8 \cos x - 11$$

Решение.

$$y = 8 \cos^2 x + 8 \cos x - 11$$

Пусть $\cos x = t$; $t \in [-1; 1]$.

Функция примет вид:

$$y = 8t^2 + 8t - 11$$

$$t_0 = -\frac{1}{2} \in [-1; 1]$$

$y_0 = -17$ - наименьшее значение функции

При $t=1$ $y=1$ – наибольшее значение функции.

Ответ: $y_{\text{наим.}} = -17$; $y_{\text{наиб.}} = 1$

2 вариант

Б. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 2 \cos 2x - 4 \sin x + 4$$

Решение.

$$y = -4 \sin^2 x - 4 \sin x + 6$$

Пусть $\sin x = t$; $t \in [-1; 1]$.

Функция примет вид:

$$y = -4t^2 - 4t + 6$$

$$t_0 = -\frac{1}{2} \in [-1; 1]$$

$y_0 = 7$ - наибольшее значение функции

При $t = 1$ $y = -2$ - наименьшее значение функции.

Ответ: $y_{\text{наим.}} = -2$; $y_{\text{наиб.}} = 7$

С. Найдите сумму натуральных значений функции

$$y = \log_3 (65 + 8 \cdot 3^{|x|} - 9^{|x|})$$

Решение.

$$\text{Пусть } 3^{|x|} = t > 0$$

Функция примет вид:

$$y = \log_3 (-t^2 + 8t + 65)$$

Рассмотрим функцию $z = -t^2 + 8t + 65$.

$$t_0 = 4; z_0 = 81$$

$$\text{Значит, } y_{\text{наиб.}} = \log_3 81 = 4$$

Натуральные значения функции: 1;2;3;4.

Ответ: 10.

Задание №2.

1 вариант

А. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = \frac{8}{5} \sqrt[3]{\sin^2 x + \cos 2x + 7}$$

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,1} \left(\frac{300}{1 + \lg(100 + x^2)} \right)$$

С. Найдите количество целых чисел из области значений функции

$$y = 16 \log_{\frac{1}{16}} \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

2 вариант

А. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2}$$

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,2} \left(\frac{80}{13 + \log_5(125 + x^4)} \right)$$

1 вариант

А. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = \frac{8}{5} \sqrt[3]{\sin^2 x + \cos 2x + 7} .$$

Решение.

$$y = \frac{8}{5} \sqrt[3]{\cos^2 x + 7}$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$7 \leq \cos^2 x + 7 \leq 8$$

$$y_{\text{наиб.}} = \frac{8}{5} \sqrt[3]{8} = 3\frac{1}{5}$$

Ответ: 3 – наибольшее целое значение функции.

2 вариант

А. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2}$$

Решение.

$$y = 25 \cdot 3^{\cos x - 2}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-3 \leq \cos x - 2 \leq -1$$

$$y_{\text{наиб.}} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$$

Ответ: 8 – наибольшее целое значение функции.

1 вариант

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,1} \left(\frac{300}{1 + \lg(100 + x^2)} \right)$$

Решение.

$$100 + x^2 \geq 100$$

$$1 + \lg(100 + x^2) \geq 3$$

Рассмотрим $z = \frac{300}{1 + \lg(100 + x^2)}$

$$E(z) = (0; 100]$$

Рассмотрим $y = \log_{0,1} z$, где $z \in (0; 100]$

$$E(y) = [-2; +\infty)$$

2 вариант

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,2} \left(\frac{80}{13 + \log_5(125 + x^4)} \right)$$

Решение.

$$125 + x^4 \geq 125$$

$$13 + \log_5(125 + x^4) \geq 16$$

Рассмотрим $z = \frac{80}{13 + \log_5(125 + x^4)}$

$$E(z) = (0; 5]$$

Рассмотрим $y = \log_{0,2} z$, где $z \in (0; 5]$

$$E(y) = [-1; +\infty)$$

С. Найдите количество целых чисел из области значений функции

$$y = 16 \log_{\frac{1}{16}} \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Решение.

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

$$2 \leq \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leq 4$$

Рассмотрим $g = \log_{\frac{1}{16}} p$, где $p \in [2; 4]$

$$E(g) = \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right]$$

Рассмотрим $y = 16g$, где $g \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right]$

$$E(y) = [-8; -4]$$

-8; -7; -6; -5; -4 – целые числа

Ответ: 5 целых чисел

Задание №3.

1 вариант

А. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x-1}$$

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \left(\frac{1}{2} \right)^{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}$$

2 вариант

А. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{6-3x} + \sqrt{4-4x}$$

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \left(\frac{1}{2} \right)^{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}$$

1 вариант

А. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x - 1}$$

Решение.

$$D(y): x \geq 1,5$$

$$y(1,5) = \sqrt{5}$$

$$E(y) = [\sqrt{5}; +\infty)$$

2 вариант

А. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{6 - 3x} + \sqrt{4 - 4x}$$

Решение.

$$D(y): x \leq 1$$

$$y(1) = \sqrt{3}$$

$$E(y) = [\sqrt{3}; +\infty)$$

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}$$

Решение.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}\cos x \leq \frac{\pi}{2}$$

На $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $z = \sin t$ возрастает; \Rightarrow

$$-\sin \frac{\pi}{2} \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) \leq \sin \frac{\pi}{2}$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) \leq 1$$

Функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^z$ - убывает; $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^1 \leq y \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$$\text{Ответ: } E(y) = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

Использование неравенств:

$$a + 1/a \geq 2 \text{ при всех } a > 0$$

$$a + 1/a = 2 \text{ при } a = 1$$

Задача:

Найти наименьшее значение функции:

- $F(x) = (x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 5) / (x^2 - 2x + 2)$

Решение:

- $F(x) = (x^2 - 2x + 2)^2 + 1 / (x^2 - 2x + 2)$

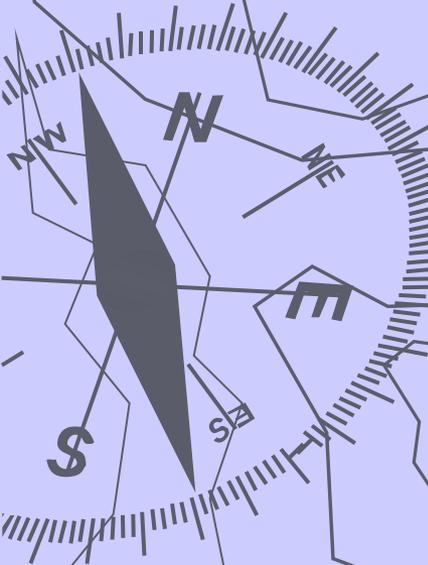
- $F(x) = \underset{(>0)}{x^2 - 2x + 2} + \underset{(>0)}{1 / (x^2 - 2x + 2)} \geq 2$

- $F(x) = 2$ – наименьшее, если: $x^2 - 2x + 2 = 1$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $x = 1$

- Значит: $F(1) = 2$

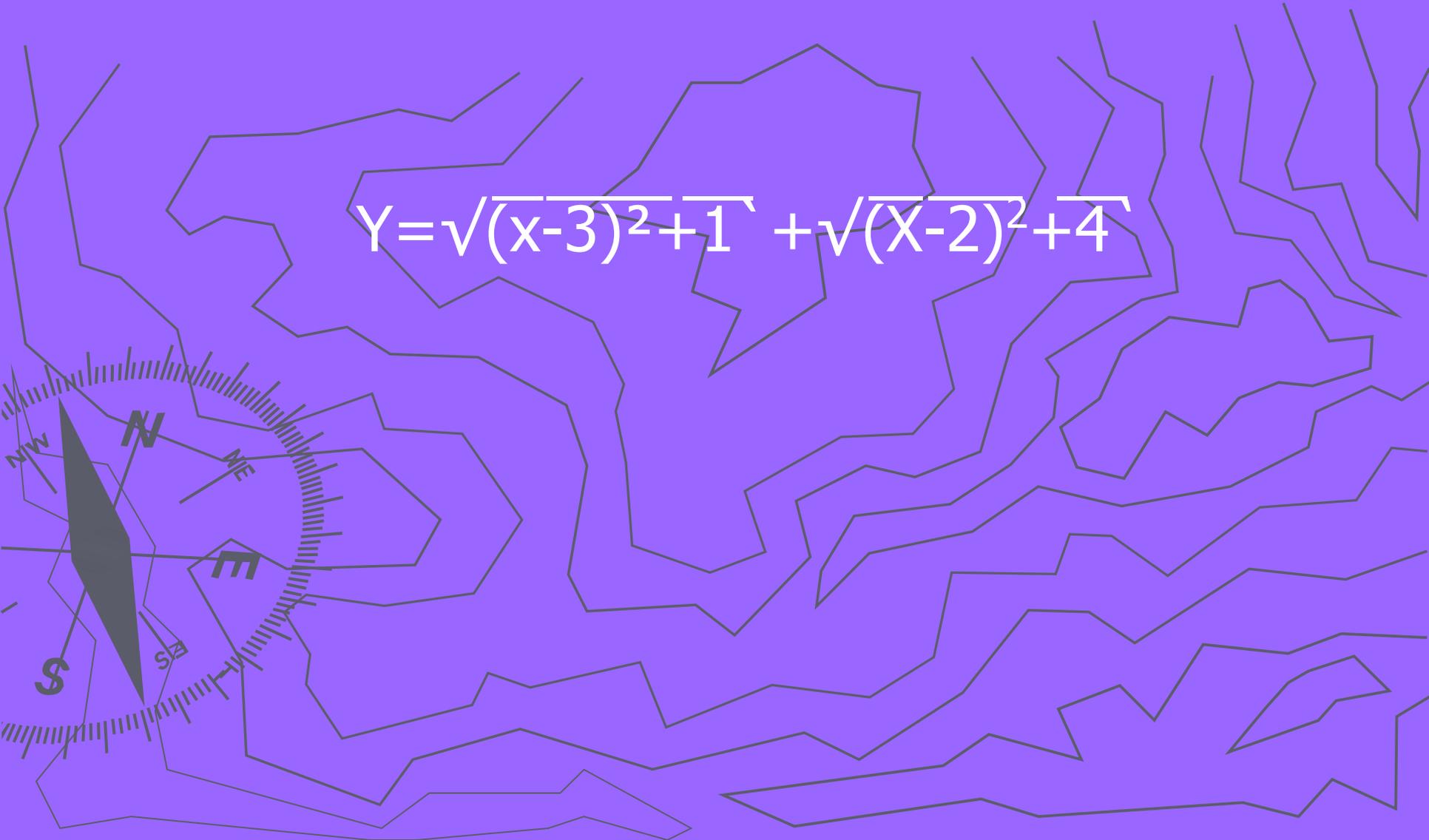
- **Ответ: 2.**

Векторный способ решения



Найти наименьшее значение функции

$$Y = \sqrt{(x-3)^2 + 1} + \sqrt{(x-2)^2 + 4}$$



Решение:

Введем векторы $\bar{a}\{3-x;1\}$ и $\bar{b}\{x-2;2\}$

Тогда $|\bar{a}|=\sqrt{(x-3)^2+1}$; $|\bar{b}|=\sqrt{(x-2)^2+4}$.

$$(\bar{a} + \bar{b}) = \{1;3\}.$$

$$|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} .$$

Воспользуемся неравенством: $|\bar{a}| + |\bar{b}| \geq |\bar{a} + \bar{b}|$



Имеем:

$$Y = |\bar{a}| + |\bar{b}| \geq |\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{10}.$$

То есть наименьшее значение функции:
 $\sqrt{10}$.



Геометрический способ решения

Найти наименьшее значение функции:

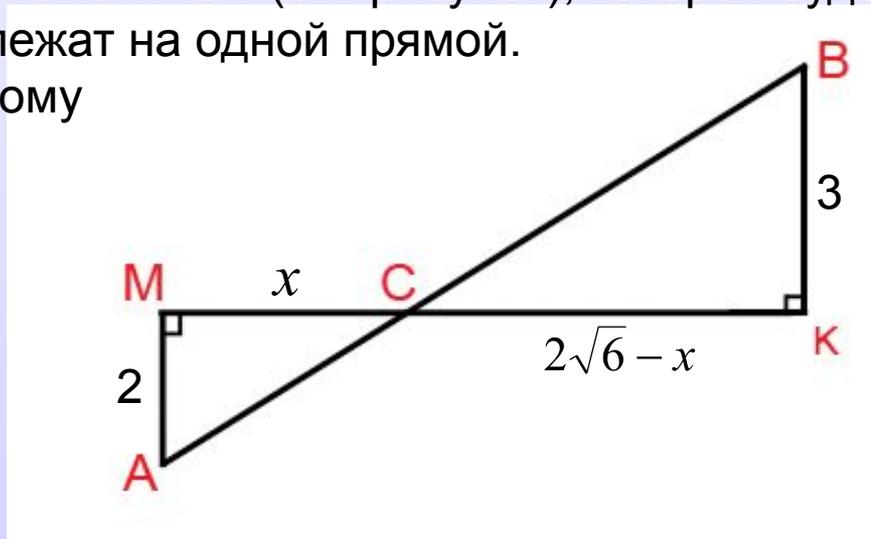
$$f(x) = \sqrt{2^2 + x^2} + \sqrt{3^2 + (2\sqrt{6} - x)^2}$$

Решение:

Данная функция задаёт длину ломаной ACB (см. рисунок), которая будет наименьшей, если точки A, C, B лежат на одной прямой.

Тогда $\triangle AMC$ подобен $\triangle BKC$, поэтому

$$\frac{AM}{BK} = \frac{MC}{KC} \quad \frac{2}{3} = \frac{x}{2\sqrt{6} - x}$$
$$x = \frac{4\sqrt{6}}{5} \quad f\left(\frac{4\sqrt{6}}{5}\right) = 7$$



Ответ: 7.

Различные способы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции

- С помощью производной
- Оценка
- Замена переменной
- Графический образ
- Введение вспомогательного угла
- Использование свойств монотонных функций
- Введение параметра
- С помощью неравенств
- Векторный способ
- Геометрический способ

Решить уравнение:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = -2x^2 + 6x - 9$$