# Урок одного уравнения

# Задача. Решите уравнение разными способами.

$$\cos x + \sin x = 1$$

?

# Семь способов решения

1. Приведение уравнения к однородному относительно синуса и косинуса.
2. Разложение левой части уравнения на множители.
3. Приведение к квадратному уравнению относительно одной из функций.
4. Возведение в квадрат обеих частей уравнения.
5. Графическое решение.
6. Использование универсальной подстановки.
7. Преобразование суммы (или разности) тригонометрических функций в произведение

# Сравните  свое решение с эталоном

,

.

# Способ первый. Приведение уравнения к однородному.

$\square\square\square\square + \square\square\square\square = 1$

Разложим левую часть по формулам двойного аргумент, а правую часть заменим тригонометрической единицей:

$$\cos^2\frac{\square}{2} - \sin^2\frac{\square}{\square} + 2\sin\frac{\square}{2}\cos\frac{\square}{2} = \cos^2\frac{\square}{2} + \sin^2\frac{\square}{2},$$

$$2\sin\frac{\square}{2}\square\square\square\frac{\square}{2} - 2\sin^2\frac{\square}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{\square}{2}\square\cos\frac{\square}{2} - \sin\frac{\square}{2}\square = 0.$$

Следовательно,

1) $\sin\frac{\square}{2} = 0; \frac{\square}{2} = \square\square; \square = 2\square\square, \square \in \mathbb{Z};$

2) $\cos\frac{\square}{2} - \sin\frac{\square}{2} = 0.$ $\cos\frac{\square}{2} \neq 0,$ потому что если $\cos\frac{\square}{2} = 0$, то $\sin\frac{\square}{2} = 0$,

что противоречит тождеству $\square\square^2\frac{\square}{2} + \sin^2\frac{\square}{2} =$

1, поэтому делим обе части уравнения на $\cos\frac{\square}{2}$. Получим: $1 - \square\square\frac{\square}{2} =$

$0; \square\square\frac{\square}{2} = 1; \frac{\square}{2} = \frac{\square}{4} + \square\square; \square = \frac{\square}{2} + 2\square\square; \square \in \mathbb{Z};$

Ответ: $2\square\square$, $\pi/2+2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

# Способ второй. Разложение левой части уравнения на множители.

$\square\square\square + \square\square\square = 1;$

$\sin\square - \square 1 - \cos\square\square = 0;$

Так как $1 - \cos\square = 2\sin^2\frac{\square}{2}$, а $\sin\square = 2\sin\frac{\square}{2}\cos\frac{\square}{2}$, то $2\sin\frac{\square}{2}\cos\frac{\square}{2} -$ $2\sin^2\frac{\square}{2} = 0$; $\sin\frac{\square}{2}\square\cos\frac{\square}{2} - \sin\frac{\square}{\square}\square = 0$, получили уравнение, которое рассматривали в первом случае.

# Способ третий. Приведение к квадратному уравнению относительно одной из функций.

$\square + \square = 1$

Так как $\sin^2 \square + \cos^2 \square = 1$, то $\sin \square = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \square}$. А уравнение примет вид

$$\pm\sqrt{1 - \cos^2 \square} = 1 - \cos \square.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x;$

$2\cos^2 x - 2\cos x = 0;$

$\cos x(\cos x - 1) = 0.$

1) $\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

2) $\cos x - 1 = 0;\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Возведение в квадрат могло привести к появлению посторонних корней, поэтому обязательно необходима проверка. Выполним ее. Полученные корни равносильны объединению трех корней $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_2 = 2\pi k$, $x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. $x_1$ и $x_2$ совпадают с полученными ранее, поэтому не являются посторонними.

Проверим:

$$x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 =$$

$-1$. $-1 \neq 1$.

Тогда $x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ – посторонний корень.

Ответ: $2\pi k$, $\pi/2+2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

# Способ четвертый. Возведение в квадрат обеих частей уравнения.

$$\square + \square = 1;$$

$$(\cos \square + \sin \square)^2 = 1^2;$$

$$\cos^2 \square + 2\cos \square \sin \square + \sin^2 \square = 1;$$

$$\sin 2\square = 0;$$

$$2\square = \square;$$

$$\square = \frac{\square}{2}\square;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Проверим, не получили ли посторонних корней. Полученные корни равносильны объединению четырех корней $x_1 = 2\pi k$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x_3 = \pi + 2\pi k$; $x_4 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Проверка показывает, что $x_4$ и $x_3$ – посторонние корни.

Ответ: $2\pi k$, $\pi/2+2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

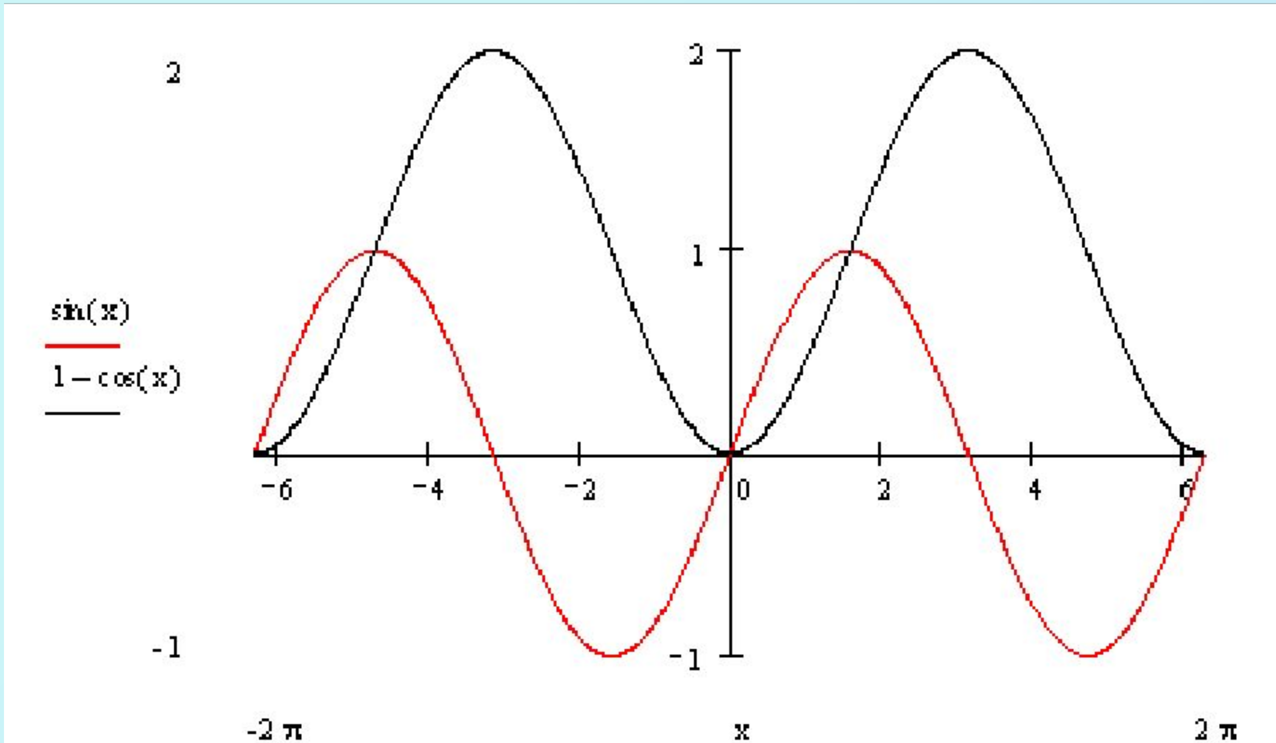
# Пятый способ. Графическое решение.

$$\sin x + \cos x = 1$$

Запишем уравнение в виде $\sin x = 1 - \cos x$.

Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = 1 - \cos x$.

Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями данного уравнения.




Ответ: 2[illegible], $\pi/2+2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

# Шестой способ. Использование универсальной подстановки.

$$\square + \square = 1$$

Выразим □ и □ через $\square\frac{\square}{2}$. Получим уравнение

$$\frac{2\square\frac{\square}{2}}{1+\square^2\frac{\square}{2}} + \frac{1-\square^2\frac{\square}{2}}{1+tg^2\frac{\square}{2}} = 1,$$

$$2tg\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2} = 1 + tg^2\frac{x}{2},$$

$$tg\frac{x}{2}\square 1 - tg\frac{x}{2}\square = 0,$$

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0,$ 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1,$

$x_1 = 2\pi k,\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

ОДЗ первоначального уравнения-все множество R. При переходе к $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ из рассмотрения выпали значения, при которых $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не имеет смысла, т.е. $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Проверкой убеждаемся, что не является.

Ответ: $2\pi k$, $\pi/2+2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

# Седьмой способ. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

$$□□□□□ + □□□□□ = 1$$

Запишем уравнение в виде $\sin□\frac{□}{2} - □□ + \sin□ = 1$. По формуле суммы двух синусов получим

$$2\sin\frac{□}{4}\cos□\frac{□}{4} - □□ = 1;$$

$$2 \cdot \frac{ξ\bar{2}}{2} \cdot \cos□\frac{□}{4} - □□ = 1;$$

$$\cos□\frac{□}{4} - □□ = \frac{1}{ξ2};$$

$$\frac{\pi}{4} - x = \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{4} - x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}.$

Человеку, изучающему алгебру часто полезнее решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решать три – четыре различные задачи. Решая одну задачу различными способами , можно путем сравнивания выяснить,  какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт.

У. У. Сойер

/английский математик и педагог XX века/

# ВСЁ!
# Точнее почти всё!
# Осталось выбрать метод решения :

Самый простой;
Самый оригинальный;
Самый неожиданный;
Самый универсальный …

**УДИВИТЕЛЬНОЕ И КРАСИВОЕ ВСЕГДА РЯДОМ!**