



«Древнейшие задачи на прогрессии»



*Подготовила:
Клещеногова В.А.,
учитель математики
МБОУ «Мордовско-
Полянская СОШ»*

«История возникновения прогрессии»

Древнейшие древнеегипетские математические тексты относятся к началу II тысячелетия до н. э. Математика тогда использовалась в астрономии, мореплавании, землемерии, при строительстве зданий, плотин, каналов и военных укреплений. Денежных расчётов, как и самих денег, в Египте не было. Египтяне писали на папирусе, который сохраняется плохо, и поэтому наши знания о математике Египта существенно меньше, чем о математике Вавилона или Греции.

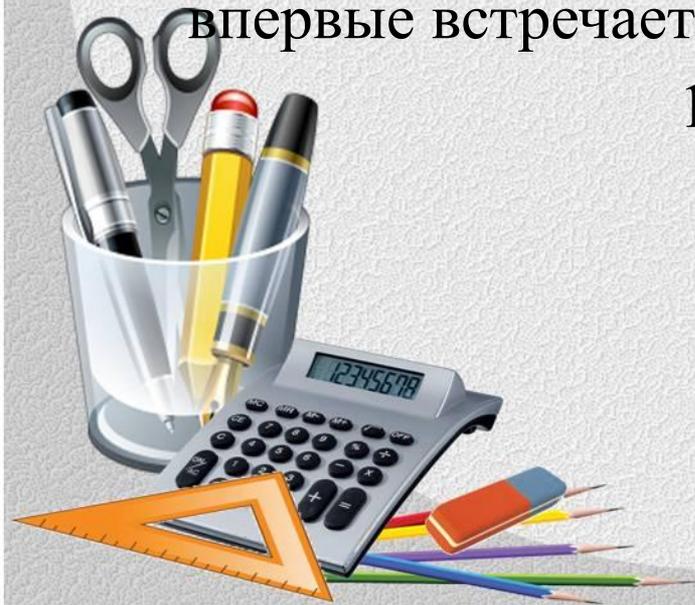
Вероятно, она была развита лучше, чем можно представить, исходя из дошедших до нас документов — известно, что греческие математики учились у египтян.

Нам ничего не известно о развитии математических знаний в Египте как в более древние, так и в более поздние времена. После воцарения Птолемея начинается чрезвычайно плодотворный синтез египетской и греческой культур.



В клинописных табличках вавилонян, в египетских пирамидах(II в. до н. э) встречаются примеры арифметических прогрессий.

Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым. Ариабхатта (v в.) применял формулы общего числа, суммы арифметической прогрессии. Но правило для нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречается в сочинении «Книги абака» в 1202г.(Леонардо Пизанский)





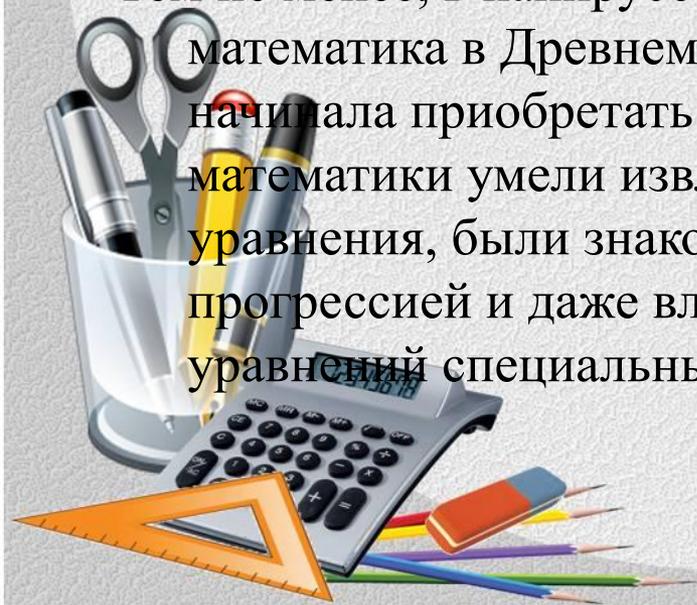
Математический папирус Ахмеса — древнеегипетское учебное руководство по арифметике и геометрии периода Среднего царства, переписанное ок. 1650 до н. э. писцом по имени Ахмес на свиток папируса длиной 5,25 м. и шириной 33 см.

Папирус Ахмеса был обнаружен в 1858 и часто называется папирусом Райнда по имени его первого владельца. В 1870 папирус был расшифрован, переведён и издан. Ныне большая часть рукописи находится в Британском музее в Лондоне, а вторая часть — в Нью-Йорке



Все задачи из папируса Ахмеса (записан ок. 1650 года до н. э.) имеют прикладной характер и связаны с практикой строительства, размежеванием земельных наделов и т. п. Задачи сгруппированы не по методам, а по тематике. По преимуществу это задачи на нахождение площадей треугольника, четырёхугольников и круга, разнообразные действия с целыми числами и аликвотными дробями, пропорциональное деление, нахождение отношений, возведение в разные степени, определение среднего арифметического, арифметические прогрессии, решение уравнений первой и второй степени с одним неизвестным.

Тем не менее, в папирусе есть целый ряд свидетельств того, что математика в Древнем Египте тех лет имела или, по крайней мере, начинала приобретать теоретический характер. Так, египетские математики умели извлекать корни и возводить в степень, решать уравнения, были знакомы с арифметической и геометрической прогрессией и даже владели зачатками алгебры: при решении уравнений специальный иероглиф «куча» обозначал неизвестное.



Задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и др.

Первые представления об арифметической и геометрической прогрессиях были еще у древних народов. Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым. В клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах встречаются задачи на прогрессии и указания, как их решать.



Задачи Древности

Задача из «Книги об абаке» Леонардо Пизанского (Фибоначчи) XIII в. :

7 старух, направляющихся в Рим (очевидно, паломниц), у каждой из которых 7 мулов, на каждом из которых по 7 мешков, в каждом из которых по 7 хлебов, в каждом из которых по 7 ножей, каждый из которых в 7 ножнах. В задаче спрашивается, сколько всего предметов.



Задача из Древней Греции:

В одном древнегреческом папирусе приводится задача:
“Имеется 7 домов, в каждом по 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышка съедает 7 колосьев, каждый из которых, если посеять зерно, дает 7 мер зерна. каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышка съедает 7 колосьев, каждый из которых, если посеять зерно, дает 7 мер зерна. нужно подсчитать сумму числа домов, кошек, мышей, колосьев и мер зерна.”



Задача из древней Руси:

Еще в XIX веке в деревнях загадывали:
“Шли 7 старцев.

У каждого старца по 7 костылей.

На каждом костыле по 7 сучков.

На каждом сучке по 7 кошелей.

В каждом кошеле по 7 пирогов.

В каждом кошеле по 7 воробьев.

Сколько всего?



Задача Древнего Египта

У семи лиц по семь кошек; каждая кошка съедает по семь мышей, каждая мышь съедает по семь колосьев, из каждого колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?»

Решение: Людей всего 7, кошек $7^2 = 49$, они съедают всего $7^3 = 343$ мыши, которые съедают всего $7^4 = 2401$ колосьев, из них вырастает $7^5 = 16807$ мер ячменя, в сумме эти числа дают 19 607.



Задача Древнего Египта

В древнеегипетском папирусе Ахмеса (ок. 2000 до н. э.) приводится задача: “Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 людьми так, чтобы разность мер ячменя, полученного каждым человеком и его соседом, равнялась $1/8$ меры”. В этой задаче речь идет об арифметической прогрессии. Условие задачи, пользуясь современными обозначениями, можно записать так: $S=10$, $d=1/8$, a_1 , a_2 , ..., a_{10} . Решение этой задачи приводит к сумме пяти членов геометрической прогрессии



Решение:

К ужасу шаха он не мог выполнить пожелание ученого.

Нетрудно сосчитать, используя формулу

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

что количество зерна, нужное для расплаты, составляет:

18 446 744 073 709 551 615

Если бы принцу удалось засеять пшеницей площадь всей поверхности Земли, считая и моря, и океаны, и пустыни, и Арктику с Антарктикой, то получить удовлетворительный урожай, то за пять лет он смог бы рассчитаться с просителем. Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с площади в 2000 раз большей поверхности Земли. Это превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до нашего времени.



«Древнейшая прогрессия»

Древнейшая задача на прогрессии - не вопрос о вознаграждении изобретателя шахмат, насчитывающий за собой двухтысячелетнюю давность, а гораздо более старая задача о делении хлеба, которая записана в знаменитом египетском папирусе Ринда. Папирус этот, разысканный Риндом в конце прошлого столетия, составлен около 2000 лет до нашей эры и является списком с другого, еще более древнего математического сочинения, относящегося, быть может, к третьему тысячелетию до нашей эры. В числе арифметических, алгебраических и геометрических задач этого документа имеется такая :

Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?



Решение:



Очевидно, количества хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть первый ее член x , разность y . Тогда доля первого x , доля второго $x + y$; доля третьего $x + 2y$ доля четвертого $x + 3y$; доля пятого $x + 4y$.

На основании условий задачи составляем следующие два уравнения:

$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100, \\ 7[x + (x + y)] = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y). \end{cases}$$

После упрощений первое уравнение получает вид $x + 2y = 20$,

а второе: $11x = 2y$.

Решив эту систему, получаем: $x = 1 \frac{2}{3}$, $y = 9 \frac{1}{6}$.

Значит, хлеб должен быть разделен на следующие части

$1 \frac{2}{3}$, $10 \frac{5}{6}$, 20 , $29 \frac{1}{6}$, $38 \frac{1}{3}$.

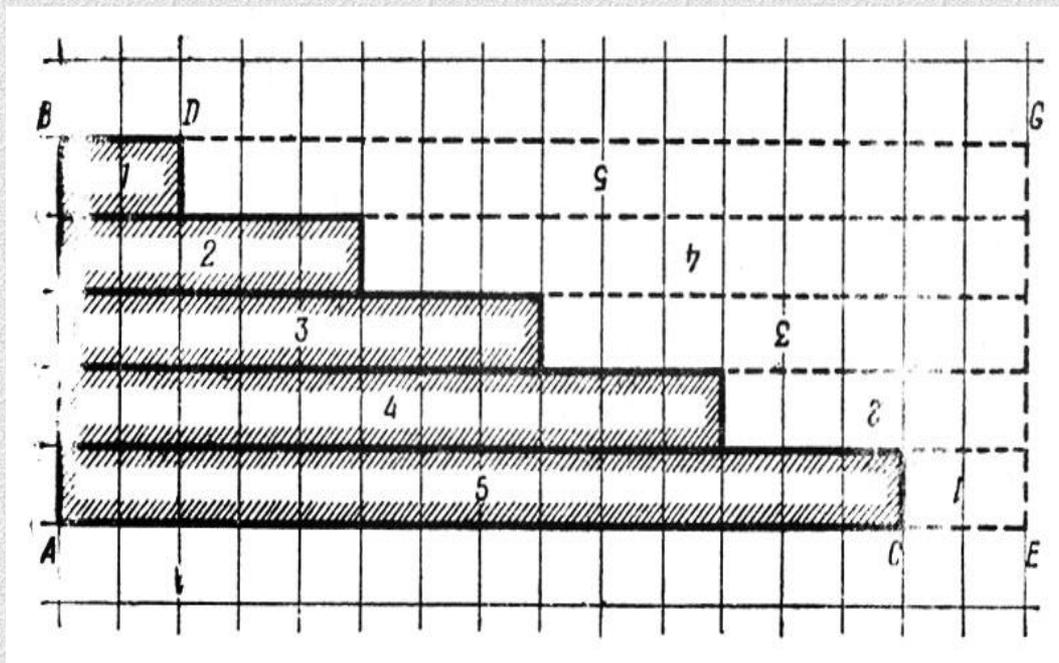


«Алгебра на клетчатой бумаге»

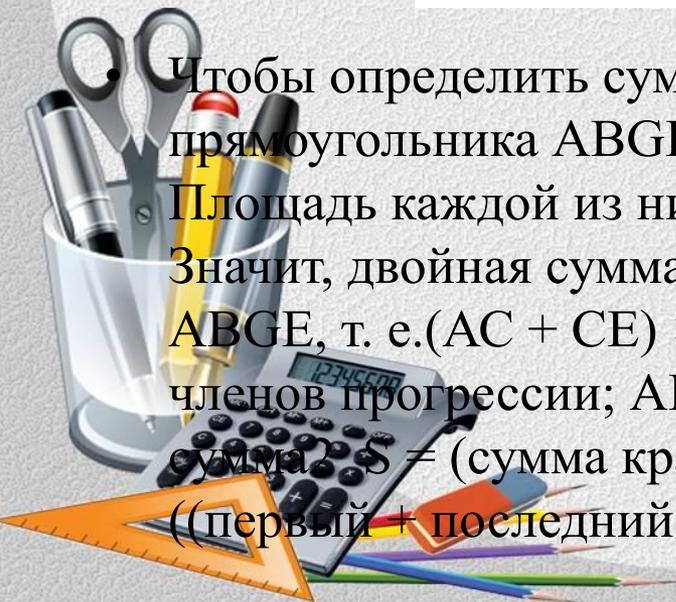
- Несмотря на пятидесятивековую древность этой задачи на прогрессии, в нашем школьном обиходе прогрессии появились сравнительно недавно. В учебнике Магницкого, изданном двести лет назад и служившем целых полвека основным руководством для школьного обучения, прогрессии хотя и имеются, но общих формул, связывающих входящие в них величины между собой, в нем не дано. Сам составитель учебника не без затруднений справлялся поэтому с такими задачами. Между тем формулу суммы членов арифметической прогрессии легко вывести простым и наглядным приемом с помощью клетчатой бумаги. На такой бумаге любая арифметическая прогрессия изображается ступенчатой фигурой.



Фигура ABDC на рис. изображает прогрессию: 2; 5; 8; 11; 14.

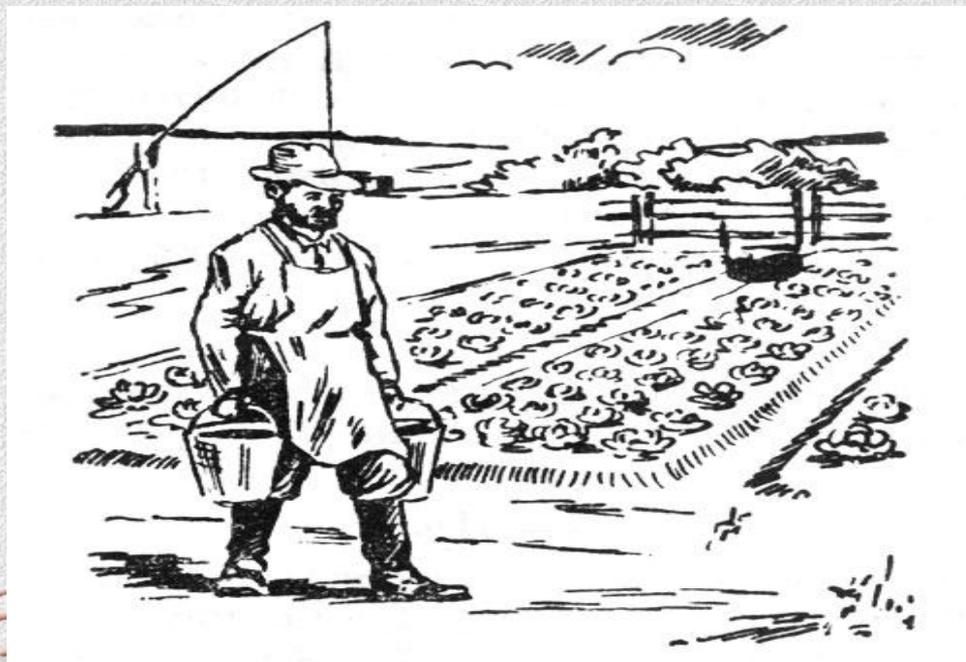


Чтобы определить сумму ее членов, дополним чертеж до прямоугольника ABGE. Получим две равные фигуры ABDC и DGEC. Площадь каждой из них изображает сумму членов нашей прогрессии. Значит, двойная сумма прогрессии равна площади прямоугольника ABGE, т. е. $(AC + CE) \times AB$. Но $AC + CE$ изображает сумму 1-го и 5-го членов прогрессии; AB - число членов прогрессии. Поэтому двойная сумма $S = (\text{сумма крайних членов}) \times (\text{число членов})$ или $S = ((\text{первый} + \text{последний член}) \times (\text{число членов}))/2$.



«Поливка огорода»

- В огороде 30 грядок, каждая длиной 16 м и шириной 2,5 м. Поливая грядки, огородник приносит ведра с водой из колодца, расположенного в 14 м от края огорода, и обходит грядки по меже, причем воды, приносимой за один раз, достаточно для поливки только одной грядки. Какой длины путь должен пройти огородник, поливая весь огород? Путь начинается и кончается у колодца.



Решение:

Для поливки первой грядки огородник должен пройти путь

$$14 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 14 = 65 \text{ м.}$$

При поливке второй он проходит

$$14 + 2,5 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 2,5 + 14 = 65 + 5 = 70 \text{ м.}$$

Каждая следующая грядка требует пути на 5 м длиннее предыдущей.

Имеем прогрессию:

$$65; 70; 75; \dots ; 65 + 5 \times 29.$$

Сумма ее членов равна

$$((65 + 65 + 29 \times 5)30)/2 = 4125 \text{ м}$$

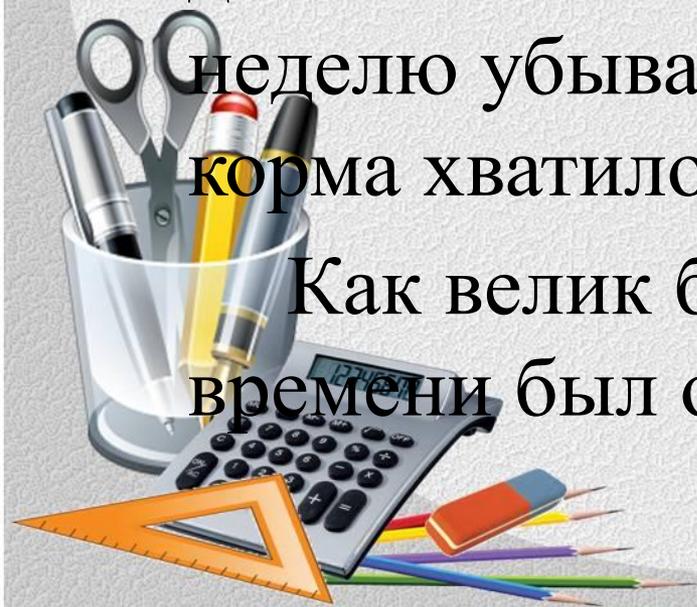
Огородник при поливке всего огорода проходит путь в 4,125 км.



«Кормление кур»

Для 31 курицы запасено некоторое количество корма из расчета по декалитру в неделю на каждую курицу. При этом предполагалось, что численность кур меняться не будет. Но так как в действительности число кур каждую неделю убывало на 1, то заготовленного корма хватило на двойной срок.

Как велик был запас корма и на сколько времени был он первоначально рассчитан?



Решение:

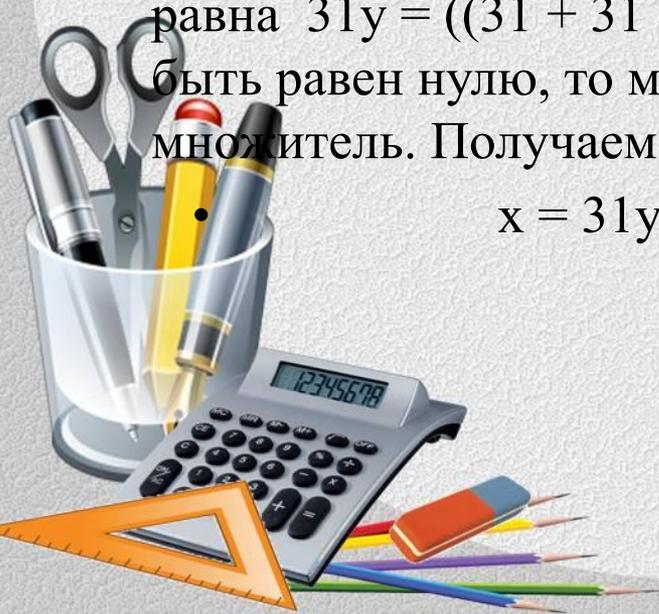
Пусть запасено было x декалитров корма на y недель. Так как корм рассчитан на 31 курицу по 1 декалитру на курицу в неделю, то $x = 31y$. В первую неделю израсходовано было 31 дл, во вторую 30, в третью 29 и т.д. до последней недели всего удвоенного срока, когда израсходовано было: $(31 - 2y + 1)$ дл*.

**Поясним: расход корма в течение*

1-й недели 31 дл, 2-й недели 31 - 1 дл, 3-й недели 31 - 2 дл,

2y-й недели $31 - (2y - 1) = 31 - 2y + 1$ дл. Весь запас составлял, следовательно, $x = 31y = 31 - 30 + 29 + \dots + (31 - 2y + 1)$. Сумма $2y$ членов прогрессии, первый член которой 31, а последний $31 - 2y + 1$, равна $31y = ((31 + 31 - 2y + 1)2y)/2 = (63 - 2y)y$. Так как y не может быть равен нулю, то мы вправе обе части равенства сократить на этот множитель. Получаем: $31 = 63 - 2y$ и $y = 16$, откуда

$x = 31y = 496$. Запасено было 496 декалитров корма на 16 недель.



«Бригада землекопов»

Старшеклассники обязались вырыть на школьном участке канаву и организовали для этого бригаду землекопов. Если бы бригада работала в полном составе, канава была бы вырыта в 24 часа. Но в действительности к работе приступил сначала только один член бригады. Спустя некоторое время присоединился второй; еще через столько же времени - третий, за ним через такой же промежуток четвертый и так до последнего. При расчете оказалось, что первый работал в 11 раз дольше последнего. Сколько времени работал последний?



Решение:

Пусть последний член бригады работал x часов, тогда первый работал $11x$ часов.

Далее, если число рывших канаву учеников было y , то общее число часов работы определится как сумма y членов убывающей прогрессии, первый член которой $11x$, а последний x , т. е. $((11x + x)y)/2 = 6xy$.

С другой стороны, известно, что бригаду из y человек, работая в полном составе, выкопала бы канаву в 24 часа, т. е. что для выполнения работы необходимо $24y$ рабочих часов. Следовательно, $6xy = 24y$.

Число y не может равняться нулю; на этот множитель можно поэтому уравнение сократить, после чего получаем: $6x = 24$ и $x = 4$.

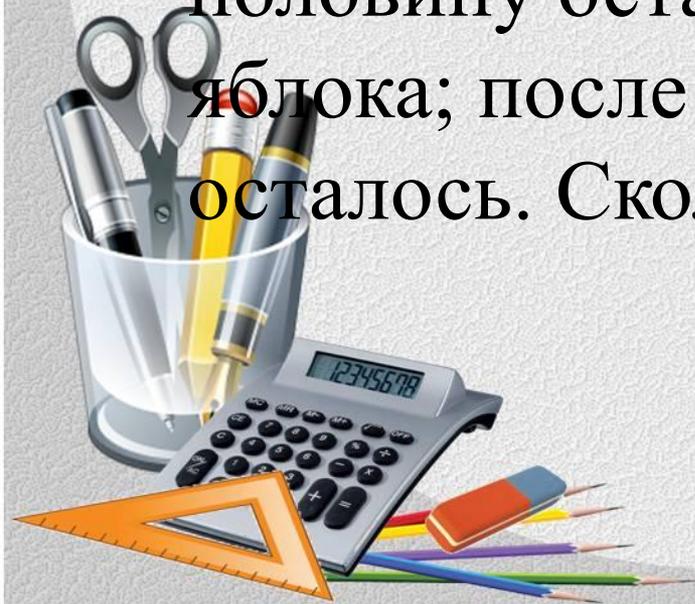
Итак, член бригады, приступивший к работе последним, работал 4 часа.

Мы ответили на вопрос задачи; но если бы мы любопытствовали знать, сколько рабочих входило в бригаду, то не могли бы этого определить, несмотря на то, что в уравнении число это фигурировало (под буквой y). Для решения этого вопроса в задаче не приведено достаточных данных.



«Яблоки»

Садовник продал первому покупателю половину всех своих яблок и еще пол-яблока, второму покупателю - половину оставшихся и еще пол-яблока: третьему - половину оставшихся и еще пол-яблока и т. д. Седьмому покупателю он продал половину оставшихся яблок и еще пол-яблока; после этого яблок у него не осталось. Сколько яблок было у садовника?



Решение:

Если первоначальное число яблок x , то первый покупатель получил $x/2 + 1/2 = (x + 1)/2$, второй $1/2(x - (x + 1)/2) + 1/2 = (x + 1)/2^2$, третий $1/2(x - (x + 1)/2 - (x + 1)/4) + 1/2 = (x + 1)/2^3$, седьмой покупатель $(x + 1)/2^7$.

Имеем уравнение

$$(x + 1)/2 + (x + 1)/2^2 + (x + 1)/2^3 + \dots + (x + 1)/2^7 = x \text{ или}$$

$$(x + 1)(1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \dots + 1/2^7) = x.$$

Вычисляя стоящую в скобках сумму членов геометрической прогрессии, найдем:

$$x/(x + 1) = 1 - 1/2^7 \text{ и}$$

$$x = 2^7 - 1 = 127.$$

Всех яблок было 127.



«Покупка лошади»

Из арифметики Магницкого:

Некто продал лошадь за 156 руб. Но покупатель, приобретя лошадь, раздумал ее покупать и возвратил продавцу, говоря:

- Нет мне расчета покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит.

Тогда продавец предложил другие условия:

- Если по-твоему цена лошади высока, то купи только ее подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне всего $\frac{1}{4}$ коп., за второй $\frac{1}{2}$ коп., за третий - 1 коп. и т. д.

Покупатель, соблазненный низкой ценой и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей.

На сколько покупатель проторговался?



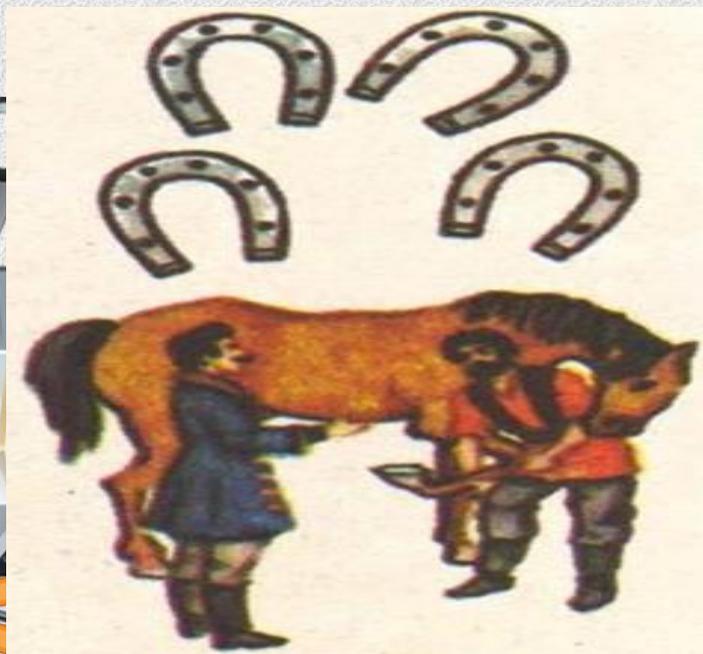
За 24 подковных гвоздя пришлось уплатить

$$1/4 + 1/2 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{24-3}$$

копеек. Сумма эта равна

$$(2^{21} \times 2 - 1/4) / (2 - 1) = 2^{22} - 1/4 = 4194303 \frac{3}{4} \text{ коп.}$$

т. е. около 42 тысяч рублей. При таких условиях не обидно дать и лошадь в придачу



«Вознаграждение воина»

Из старинного русского учебника математики

"Полный курс чистой математики, сочиненный Артиллерии Штык-Юнкером и Математики партикулярным Учителем Ефимом Войтяховским в пользу и употребление юношества и упражняющихся в Математике" (1795):

"Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 копейка, за другую - 2 копейки, за третью - 4 копейки и т. д. По исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 руб. 35 коп. Спрашивается число его ран".



Решение:

Составляем уравнение

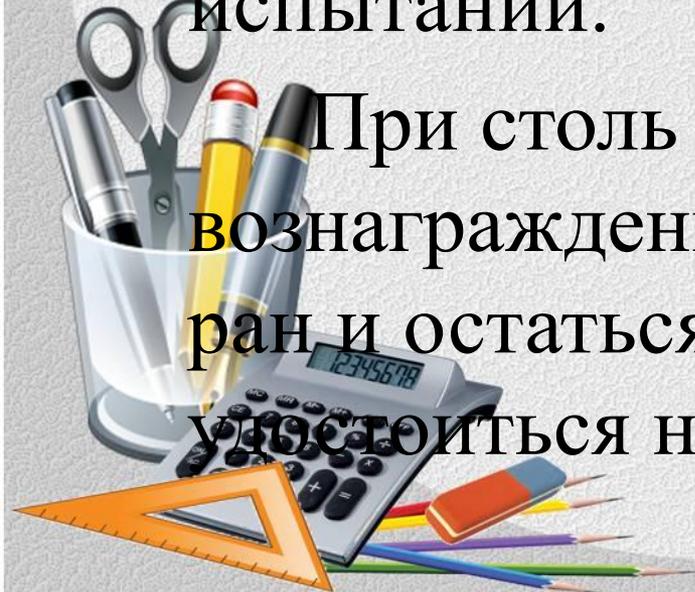
$$65535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{x-1} \text{ или}$$

$$65535 = (2^{x-1} \times 2 - 1)/(2 - 1) = 2^{x-1},$$

откуда имеем: $65536 = 2^x$ и $x = 16$ -

результат, который легко находим путем
испытаний.

При столь великодушной системе
вознаграждения воин должен получить 16
ран и остаться при этом в живых, чтобы
уверенно получить награды в 655 руб. 35 коп.



Литература:

- «Занимательная алгебра» Я.И.Перельман
Изд-во «Триада- Литера» Москва, 1994г.
- Интернет-ресурсы.

