

ГБПОУ ВО «ВЮТ»

Интегральное исчисление

Преподаватель математики:
Будаева А.Б

Воронеж-2015

Интегральное исчисление

Цель: рассмотреть понятие первообразной функции, неопределенного и определенного интеграла, свойства неопределенного и определенного интеграла, формулу Ньютона-Лейбница. Ознакомиться с таблицей интегралов, понятием криволинейной трапеции и нахождением ее площади. Освоить навыки вычисления интеграла.

Развивать познавательный интерес, логическое мышление, внимание. Формировать потребности в приобретении знаний.

Воспитывать ответственность, самостоятельность, культуру общения и учебного труда.

В результате проведения занятия студент должен:

Знать основные понятия: неопределенный интеграл, свойства неопределенного интеграла (таблица интегралов), определенный интеграл, свойства определенного интеграла.

Уметь находить неопределенный и определенный интеграл.

Интегральное исчисление

Определенный
интеграл

Первообразная

Неопределенный
интеграл

Свойства
определенного
интеграла

Свойства
неопределенного
интеграла

Приложения
определенного
интеграла

Примеры

Таблица основных
интегралов

Первообразная

Задача дифференциального исчисления: по данной функции найти её производную.

Задача интегрального исчисления: найти функцию, зная её производную.

- Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для любого x из этого промежутка справедливо равенство **$F'(x)=f(x)$** .

Для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная?

Теорема.

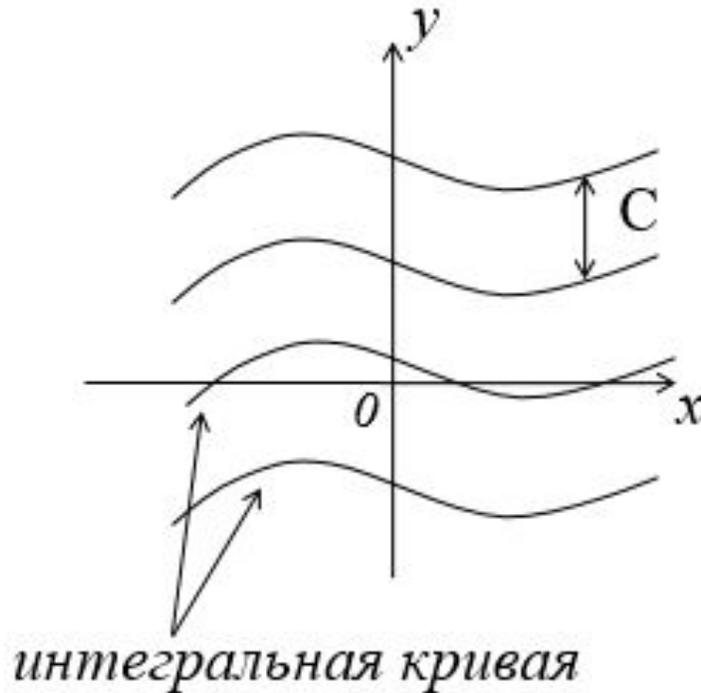
Если функция непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нём первообразную.

Теорема.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных этой функции имеет вид $F(x)+C$, где $C \in \mathbb{R}$.

Геометрически:

$F(x)+C$ представляет собой семейство кривых, получаемых из каждой из них параллельным переносом вдоль оси OY .



Неопределённый интеграл

Множество всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ на некотором промежутке называется **неопределённым интегралом** и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x) dx$ - подынтегральное выражение

x – переменная интегрирования

\int - знак неопределённого интеграла

$F(x)+C$ – множество всех первообразных

C – постоянная интегрирования

Процесс нахождения первообразной функции называется **интегрированием**, а раздел математики-**интегральным исчислением**.



Свойства неопределённого интеграла

1. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx, \quad \left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$$

2. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Свойства неопределённого интеграла

3. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx, \quad a \neq 0$$



Таблица основных неопределенных интегралов

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1,$$

$$1'. \int dx = x + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1,$$

$$3'. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C.$$



Пример 1.

$$\int (3x^5 + 4 \cos x - 2x + 1) dx =$$

Интеграл суммы выражений равен сумме интегралов этих выражений

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int 3x^5 dx + \int 4 \cos x dx - \int 2x dx + \int 1 dx =$$

$$3 \int x^5 dx + 4 \int \cos x dx - 2 \int x dx + 1 \int dx =$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int \cos x dx = \sin x +$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int dx = x + c$$

$$\frac{3x^{5+1}}{5+1} + 4 \sin x - \frac{2x^2}{2} + x + C \rightarrow \frac{1}{2} x^6 + 4 \sin x - x^2 + x + C$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int (2x^4 + 3\sin x - 5e^x) dx$

$$\int (2x^4 + 3\sin x - 5e^x) dx = \int 2x^4 dx + \int 3\sin x dx - \int 5e^x dx =$$

$$= 2 \cdot \int x^4 dx + 3 \cdot \int \sin x dx - 5 \cdot \int e^x dx = 2 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 + 3 \cdot (-\cos x) + C_2 - 5 \cdot e^x + C_3 =$$

$$= \frac{2}{5} x^5 - 3 \cos x - 5e^x + C, \quad C = C_1 + C_2 + C_3$$

Пример 3.

Вычислить интеграл

$$\int \frac{2x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$\int \frac{2x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = 2 \cdot \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx = 2 \cdot \int x^{\frac{7}{6}} dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C = \frac{12}{13} \cdot \sqrt[6]{x^{13}} + C = \frac{12}{13} \cdot x^2 \cdot \sqrt[6]{x} + C$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{2+x^4}{x} dx$

$$\int \frac{2+x^4}{x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{x^4}{x} \right) dx = \int \frac{2}{x} dx + \int x^3 dx =$$

$$= 2 \cdot \int \frac{dx}{x} + \int x^3 dx = 2 \cdot \ln|x| + \frac{x^4}{4} + C$$

Пример 5.

Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int 3^x \cdot 4^{2x} dx$

$$\int 3^x \cdot 4^{2x} dx = \int 3^x \cdot 16^x dx = \int 48^x dx = \frac{48^x}{\ln 48} + C$$



Определенный интеграл

Выражение вида $\int_a^b f(x) dx$ называется определенным интегралом

Числа a и b называются соответственно *нижними и верхними пределами интегрирования*,
 $f(x)$ – подынтегральной функцией;
 $f(x)dx$ - подынтегральным выражением,
 x - переменной интегрирования,
отрезок $[a;b]$ – областью (отрезком) интегрирования.



Свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Связь между определенным интегралом и первообразной (Формула Ньютона - Лейбница)

- ▶ Для непрерывной функции

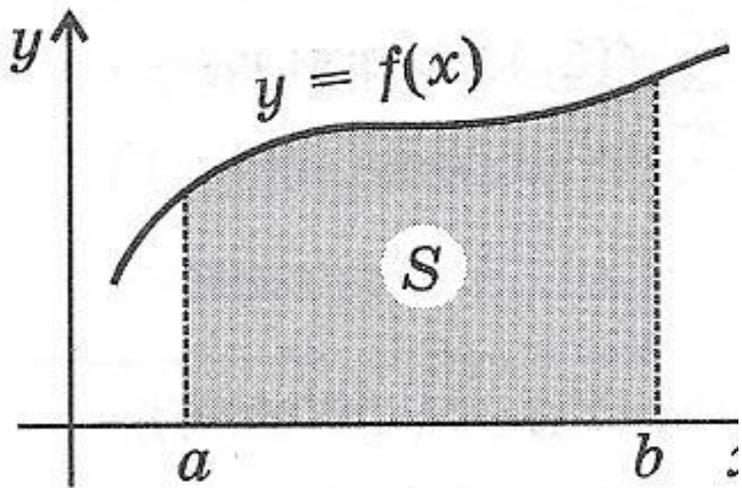
$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.



Геометрический смысл определенного интеграла

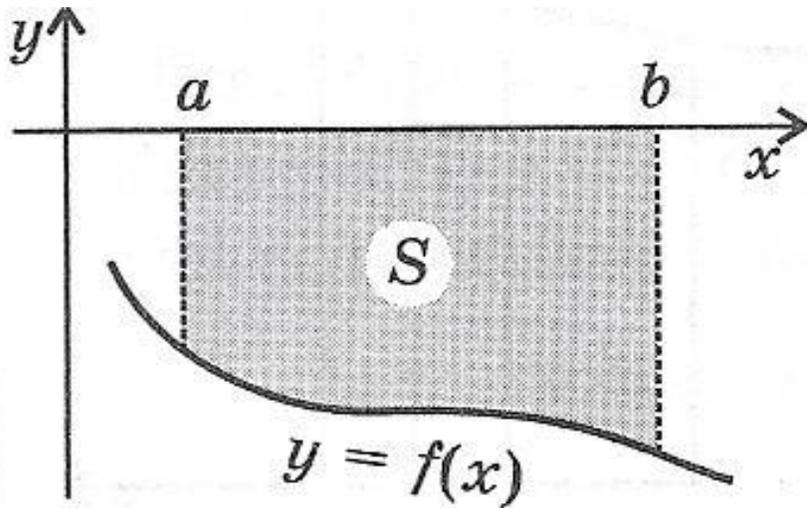
- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x=a$ и $x=b$:



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

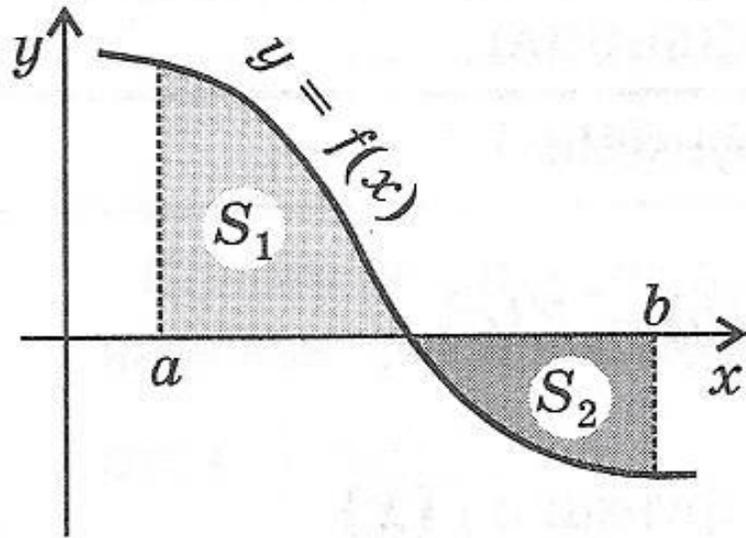
- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x=a$ и $x=b$:



$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

- **Замечание:** Если функция изменяет знак на промежутке $[a;b]$, то



$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x) dx$$

Вычисление площадей плоских фигур

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x-2$ и $y=x^2-4x+2$

1. $y=x^2-4x+2$, $x_г = 2$, $y_г = -2$

2. $y=x-2$: $x=0$, $y=-2$; $x=2$, $y=0$

3. Абсциссы точек пересечения:

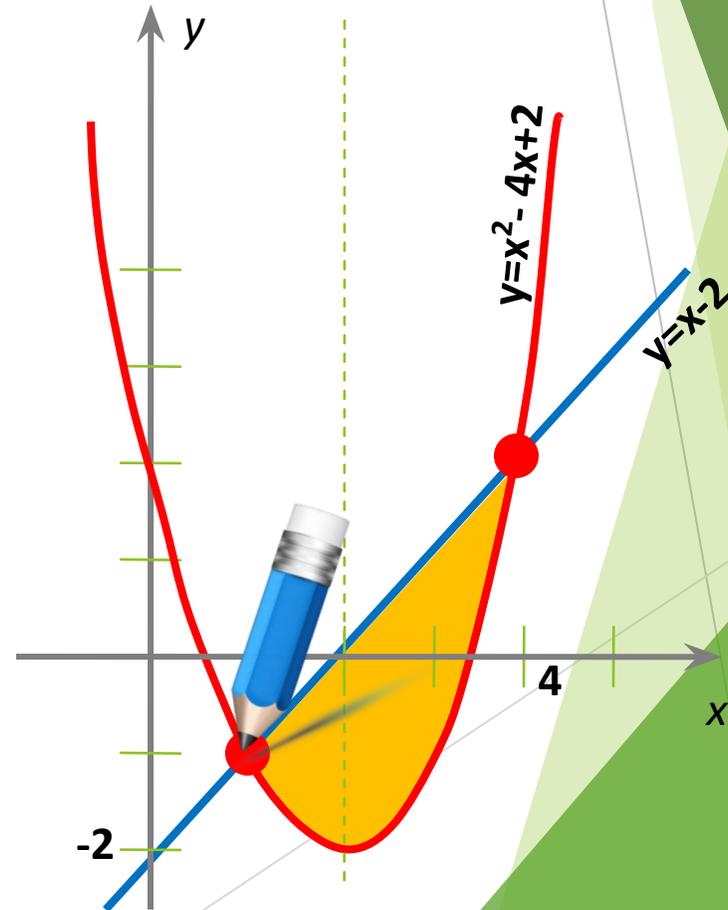
$$x^2 - 4x + 2 = x - 2$$

$$x_1 = 1, x_2 = 4$$

4. $S = \int_1^4 ((x-2) - (x^2 - 4x + 2)) dx =$

$$= \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx = \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_1^4 = 4,5$$

Ответ: $S=4,5$

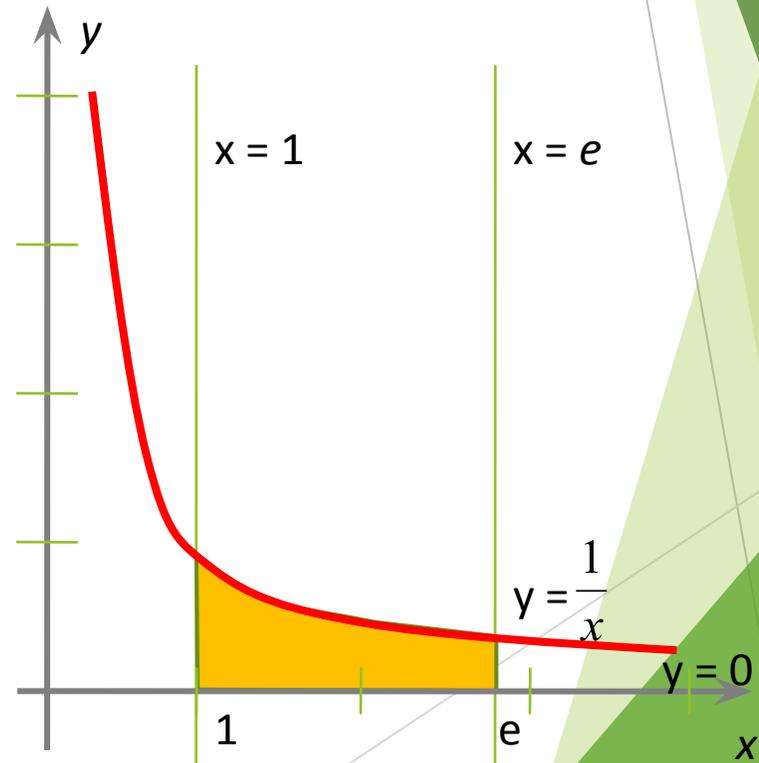


Вычисление площади криволинейной трапеции

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 0$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = e$.

$$S = \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Ответ: $S = 1$



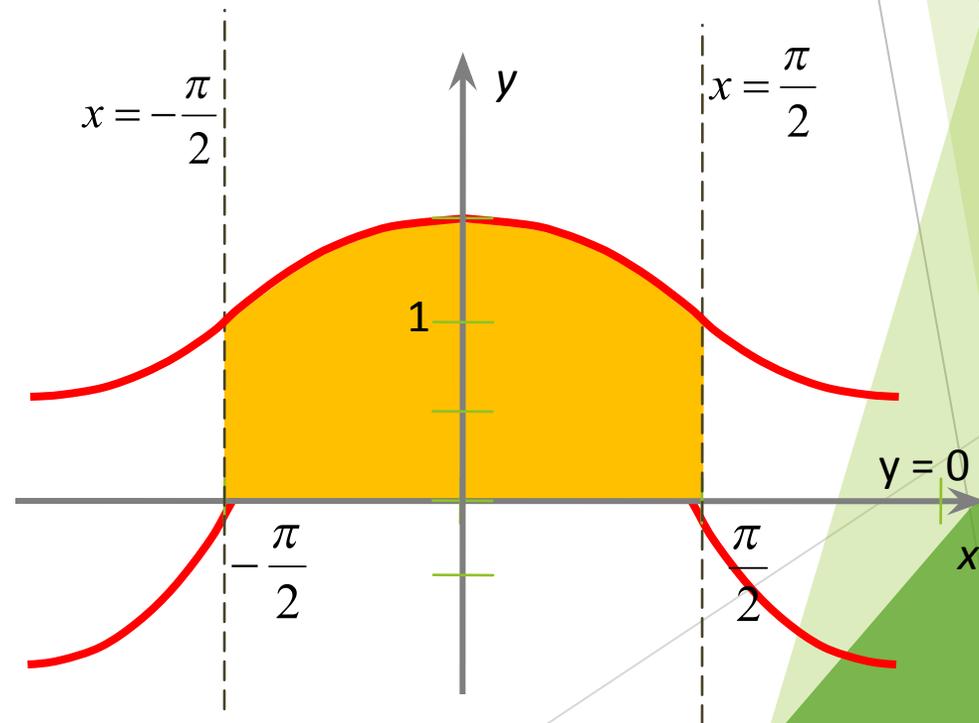
Вычисление площади криволинейной трапеции

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 1 + \frac{1}{2} \cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \cos x\right) dx =$$

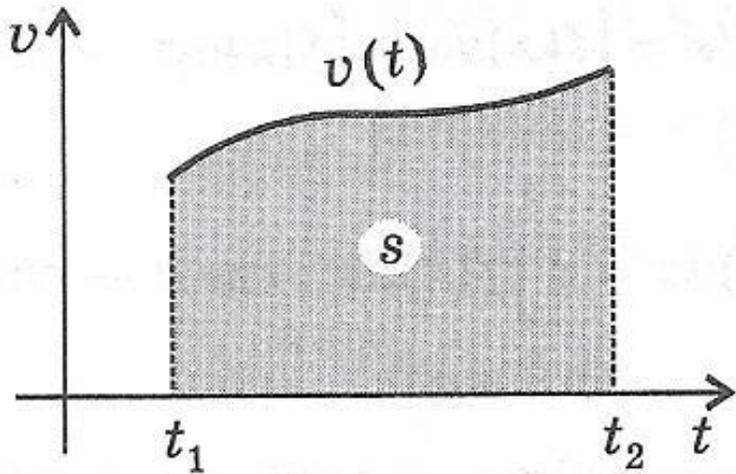
$$= \left(x + \frac{1}{2} \sin x\right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 1$$



Ответ: $S = \pi + 1$

Физический смысл определенного интеграла

- При прямолинейном движении перемещение s численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости v от времени t :

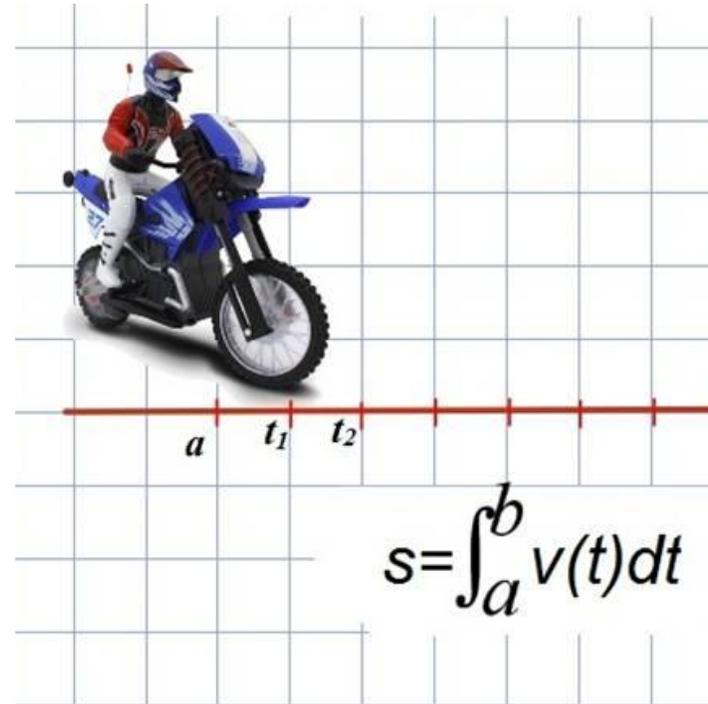


$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Физический смысл определенного интеграла

Материальная точка движется по прямой со скоростью, определяемой формулой $v = 3t^2 - 4t + 1$, (время измеряется в секундах, скорость — в сантиметрах в секунду).

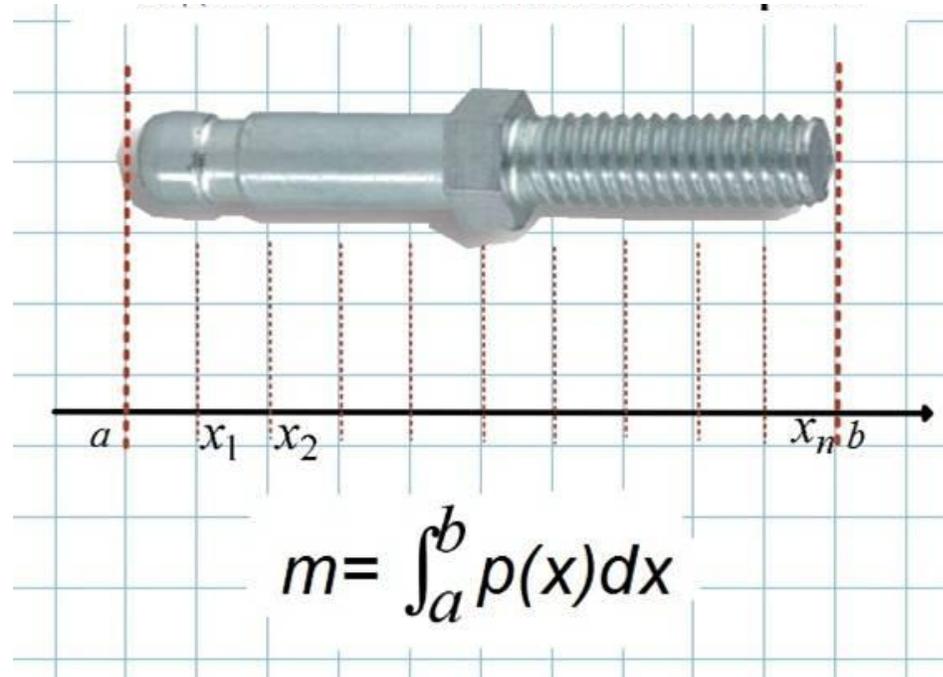
Какой путь пройдёт точка за 3 секунды, считая от начала движения ($t=0$)?



Ответ: **12см**

Физический смысл определенного интеграла

Дан прямолинейный неоднородный стержень $[0;6]$, его плотность в точке x определяется по формуле $\rho(x) = x^2 + x + 1$.
Найдите массу стержня.



Ответ: 96

Основные источники

1. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для образовательных учреждений: базовый уровень / [Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др.]. – М.: Просвещение, 2011. – 464 с.
2. Атанасян, Л.С. Геометрия: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – М.: Просвещение, 2011. – 384 с.
3. Башмаков, М.И. Математика: учебник / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2013. – 400, с.
4. Богомолов, Н.В. Математика: учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2013. – 396 с.
6. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. Учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов и др. – М.: Просвещение, 2013. – 365 с.

Интернет-ресурсы

www.interneturok.ru

www.researcher.ru

www.schools.keldysh.ru/labmro

www.urokimatematiki.ru

www.1september.ru

www.pedsovet.org