

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии

Урок алгебры в 9 классе.

Цели урока:

- отрабатывать навыки применения формулы n -го члена арифметической прогрессии;
- Вывести формулы суммы n -членов арифметической прогрессии;
- развивать умение выделять главное, сравнивать, обобщать изучаемые факты, логически излагать свои мысли.

Фронтальная беседа

1. Приведите примеры последовательности.
2. Сформулируйте определение арифметической прогрессии.
3. По какой формуле вычисляется n -й член арифметической прогрессии?

Устная работа:

Является ли заданная последовательность арифметической прогрессией, почему?

1. $3; 6; 9; 12; \dots$
2. $-1; -1; -1; \dots$
3. $0; 13; 1; 14; \dots$
4. $-3; -1; 1; 3; \dots$

Задача

- Найдите сумму 100 первых натуральных чисел.
- $1+2+3+4+5+\dots+98+99+100=$
- Ваши решения?

Решение

$$\bullet S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$\bullet S = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

Таких пар 100.

$$2S = 101 \cdot 100$$

Но так как мы складывали дважды все числа, надо сумму разделить на 2, чтобы получить ответ.

$$S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$$

Формула

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

- Где a_1 – первый член арифметической прогрессии, a_n – последний член, n – количество суммируемых членов.

Формула

- Если в предыдущей формуле заменить $a_n = a_1 + d(n-1)$, то получится новая формула:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

Из истории математики



С формулой суммы n -первых членов арифметической прогрессии был связан эпизод из жизни немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777-1855). Когда ему было 9 лет, учитель, занятый проверкой учеников других классов, задал на уроке следующую задачу: «Сосчитать сумму натуральных чисел от 1 до 100 включительно», надеясь, что это займёт много времени. Каково же было удивление учителя, когда один из учеников (это был Гаусс) через минуту воскликнул: «Я уже решил...»

Большинство учеников после долгих вычислений получили неверный результат. В тетради Гаусса было написано одно число и притом верное. Маленький Гаусс сразу сообразил, что $1+100=101$, $2+99=101$ и т.д. И таких чисел будет 50. Осталось умножить 101 на 50, что он сделал в уме. Изумленный учитель понял, что это самый способный ученик в его практике. В дальнейшем Гаусс сделал много замечательных открытий. Его даже называли «царём математики».

Решение задач:

Задача 1: Найдите сумму первых шестнадцати членов арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 6$, $d = 4$

Решение:

Найдём сумму по формуле: $S = (a_1 + a_n) : 2 \cdot n$

По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём сначала a_{16} .

$a_{16} = 6 + 4(16 - 1) = 6 + 4 \cdot 15 = 66$, тогда

$S_{16} = (6 + 66) : 2 \cdot 16 = 72 \cdot 8 = 576$

Ответ: 576



Задача 2: Тело в первую секунду прошло 16 метров, а в каждую следующую проходило на 3 метра больше, чем в предыдущую. Какой путь прошло это тело за 7 секунд?

Решение:

Найдём сумму по формуле: $S = (a_1 + a_n) : 2 \cdot n$

По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём сначала a_7 .

$a_7 = 16 + 3(7 - 1) = 16 + 18 = 34$, тогда

$S_7 = (16 + 34) : 2 \cdot 7 = 50 : 2 \cdot 7 = 175$

Ответ: 175



Задача 3

- Найдите сумму первых двадцати членов арифметической последовательности 4; 5,5.....
- Решение: здесь известны $a_1 = \dots$, $a_2 = \dots$

Найдите d : $a_2 - a_1 = 5,5 - 4 = \dots$

Используем формулу

Подставьте в неё a_1 , d , n .

Ответ

- 365.

Задача 4

- Найдите сумму первых сорока членов арифметической последовательности (a_n) , заданной формулой $a_n = 5n - 4$.
- Решение: найдём a_1, a_{40}
- $a_1 = 5 \cdot 1 - 4 = \dots$
- $a_{40} = 5 \cdot 40 - 4 = \dots$
- Подставим в формулу $\dots$

Ответ

- 3940.

Итог урока:

По какой формуле находится сумма первых n -членов арифметической прогрессии?

В заключении вспомним строки А.С.Пушкина из романа «Евгений Онегин», сказанные о его герое:

«...не мог он ямба от хорея, как мы ни бились, отличить». Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха. Ямб - стихотворный метр с ударениями на чётных слогах стиха, то есть ударными слогами являются 2-й, 4-й, 6-й, 8-й и так далее слоги. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и с разностью, равной двум: 2;4;6;8;... Хорей – стихотворный размер с ударением на нечётных слогах стиха. Номера ударных слогов также образуют арифметическую прогрессию, но её первый член равен единице, а разность по-прежнему равна двум: 1;3;5;7;....