НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛИ

1. $|f(x)| \vee 0 \Leftrightarrow f^2(x) \vee 0.$

2. $|f(x)| \vee |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \vee g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \vee 0 \Leftrightarrow$

$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \vee 0.$

Вывод: $|f(x)| - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \vee 0.$

3. $(|f(x)| - |g(x)|) \cdot \varphi(x) \vee 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \cdot \varphi(x) \vee 0.$

4. $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow |f(x)| - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \leq 0. \end{cases}$

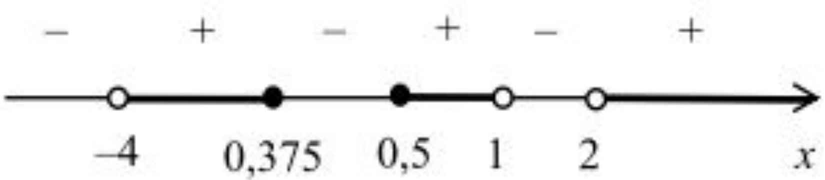
5. $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow |f(x)| - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0, \\ |f(x)| - g(x) > 0 \quad \forall x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$$

Решите неравенство $$\frac{|5x-2|-|3x-1|}{|x^2-3x-3|-|x^2+7x-13|}\le 0.$$

$$\frac{(5x-2-3x+1)(5x-2+3x-1)}{(x^2-3x-3-x^2-7x+13)(x^2-3x-3+x^2+7x-13)}\le 0 \iff$$

$$\frac{(2x-1)(8x-3)}{(-10x+10)(2x^2+4x-16)}\le 0 \iff \frac{(2x-1)(8x-3)}{(x-1)(x+4)(x-2)}\ge 0$$



$x\in(-4;\,0{,}375]\cup[0{,}5;\,1)\cup(2;\,+\infty).$

Ответ: $(-4;\,0{,}375]\cup[0{,}5;\,1)\cup(2;\,+\infty).$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. $\sqrt[2n]{f(x)} - \sqrt[2n]{g(x)} \vee 0$, $n \in N$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) - g(x) \vee 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

2. $\sqrt[2n+1]{f(x)} - \sqrt[2n+1]{g(x)} \vee 0$, $n \in N$ $\Leftrightarrow$ $f(x) - g(x) \vee 0.$

3. $\sqrt[2n]{f(x)} - g(x) \geq 0$, $n \in N$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) - g^{2n}(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ \sqrt[2n]{f(x)} - g(x) > 0 \, \forall \, x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$$

4. $\sqrt[2n]{f(x)} - g(x) \leq 0$, $n \in N$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) - g^{2n}(x) \leq 0. \end{cases}$

5. $\sqrt[2n+1]{f(x)} - g(x) \vee 0 \Leftrightarrow f(x) - g^{2n+1}(x) \vee 0.$

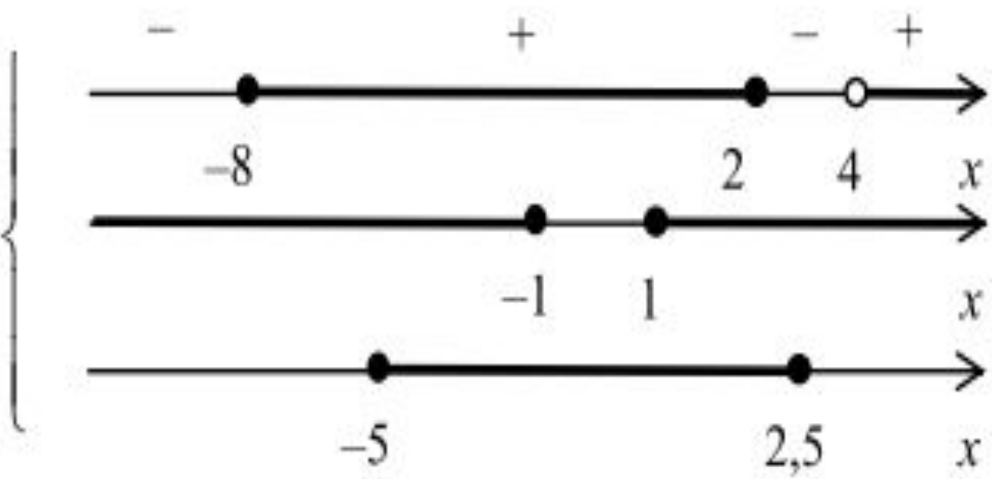
6. $\sqrt[2n]{f(x)} - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - g^{2n}(x) \vee 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

7. $\sqrt[2n+1]{f(x)} - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow f(x) - |g(x)|^{2n+1} \vee 0.$

Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3(5-2x)}}{\sqrt{x+5}-3}\geq 0$

Решение. (1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{15-6x}}{\sqrt{x+5}-3} \geq 0$ $\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x^2-1)-(15-6x)}{x+5-9} \geq 0, \\ x^2-1 \geq 0, \\ 5-2x \geq 0, \\ x+5 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2+6x-16}{x-4} \geq 0, \\ (x-1)(x+1) \geq 0, \\ x \leq 2{,}5, \\ x \geq -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x+8)(x-2)}{x-4} \geq 0, \\ (x-1)(x+1) \geq 0, \\ x \in [-5;\ 2{,}5] \end{array}\right. \Leftrightarrow$$



$x \in [-5;\ -1] \cup [1;\ 2].$

Ответ: $[-5;\ -1] \cup [1;\ 2]$.

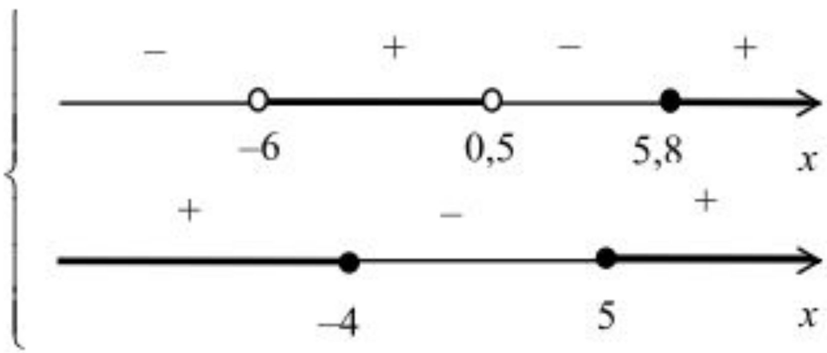
Пример 16. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-x-20}-|x-3|}{\sqrt[3]{x^3-4x^2+23x-14}-x+2}\geq 0$

Решение. (1) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{\sqrt{x^2-x-20}-\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt[3]{x^3-4x^2+23x-14}-\sqrt[3]{(x-2)^3}} \geq 0.$

Применим МЗМ.

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2-x-20)-(x^2-6x+9)}{(x^3-4x^2+23x-14)-(x^3-6x^2+12x-8)} \geq 0, \\ x^2-x-20 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5x-29}{2x^2+11x-6} \geq 0, \\ (x-5)(x+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{5x-29}{(2x-1)(x+6)} \geq 0, \\ (x-5)(x+4) \geq 0 \end{cases}$$



$x \in (-6; -4] \cup [5{,}8; +\infty).$

Ответ: $(-6; -4] \cup [5{,}8; +\infty).$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

4.1. Условия равносильности для МЗМ

1. $\begin{cases} a^x \vee b, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ x \vee \log_a b \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1) \\ x \wedge \log_a b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a-1>0, \\ x-\log_a b \vee 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a-1<0, \\ -(x-\log_a b) \vee 0. \end{cases}$

Вывод: $\begin{cases} a^x - b \vee 0, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)(x-\log_a b) \vee 0.$

2. $\begin{cases} a^x - b < 0, \\ b \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$, так как $a^x > 0 \quad \forall x \in R.$

3. $\begin{cases} a^x - b > 0, \\ b \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in R.$

4. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) \vee g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1), \\ f(x) \wedge g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a-1>0, \\ f(x)-g(x) \vee 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a-1<0, a>0 \\ -(f(x)-g(x)) \vee 0. \end{cases}$

Вывод: $a^{f(x)} - a^{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) \vee 0.$

Частные случаи

1. $\begin{cases} a^{f(x)} - b \vee 0 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^{f(x)} - a^{\log_a b} \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-\log_a b) \vee 0.$

2. $a^{f(x)} - 1 \vee 0 \Leftrightarrow a^{f(x)} - a^0 \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)\cdot f(x) \vee 0.$

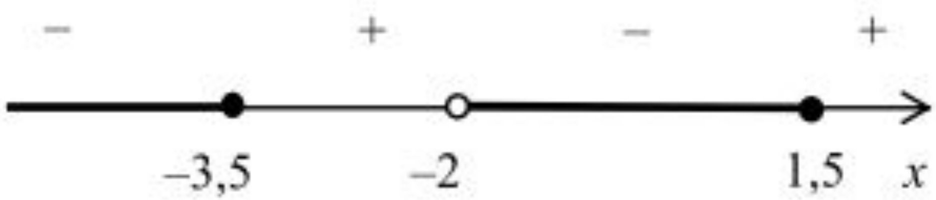
4. Решите неравенство $\dfrac{9^{x^2+5x-6}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x^2-2x-9}}{2^{3x-4}-(0,5)^{6-2x}}\le 0$

Решение. $(1) \Leftrightarrow \dfrac{3^{2x^2+10x-12}-3^{-2x^2+2x+9}}{2^{3x-4}-2^{2x-6}} \leq 0$

Применим МЗМ.

$$\frac{(3-1)\left(2x^2+10x-12-\left(-2x^2+2x+9\right)\right)}{(2-1)\left((3x-4)-(2x-6)\right)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+8x-21}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x+7)(2x-3)}{x+2} \leq 0.$$



$x \in (-\infty; -3{,}5] \cup (-2; 1{,}5]$.

Ответ: $(-\infty; -3{,}5] \cup (-2; 1{,}5]$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

5.1. Условия равносильности для МЗМ

1. $\log_a f(x) \vee \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \vee g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \wedge g(x) \end{cases} \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a > 1, \\ f(x) - g(x) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1), \\ -\left(f(x) - g(x)\right) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Вывод: $\log_a f(x) - \log_a g(x) \vee 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (a-1)\left(f(x) - g(x)\right) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{f(x) - g(x)}{a-1} \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Частные случаи

1. $\log_a f(x) - b \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \log_a f(x) - \log_a a^b \vee 0 \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (a-1)\left(f(x)-a^b\right) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ a > 0,\;\; a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-a^b}{a-1} \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ a > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

2. $\log_a f(x) + \log_a g(x) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right) - \log_a 1 \vee 0 \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

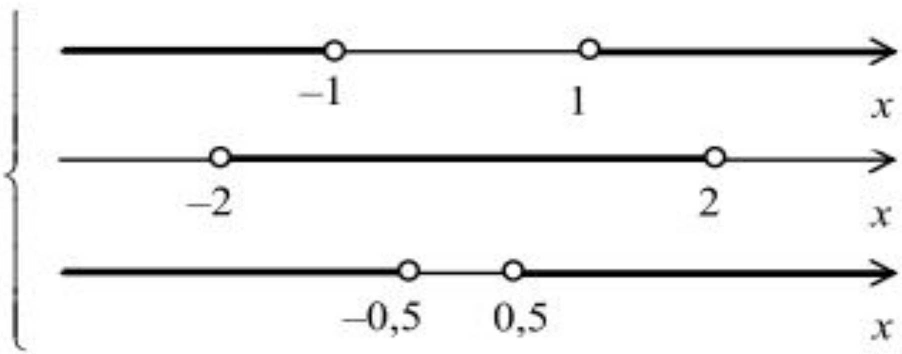
$$\begin{cases} (a-1)\left(f(x)\cdot g(x)-1\right) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)\cdot g(x)-1}{a-1} \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Решите неравенство $\log_{0,5}\left(4-x^2\right)>\log_{0,5}\left(6|x|-3\right)$

Решение. (1) $\Leftrightarrow$ $\log_{0,5}\left(4-x^2\right)-\log_{0,5}\left(6|x|-3\right)>0$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(0,5-1)\left(\left(4-x^2\right)-\left(6|x|-3\right)\right)>0,\\ 4-x^2>0,\\ 6|x|-3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|^2+6|x|-7>0,\\ x^2-4<0,\\ 2|x|-1>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(|x|+7)(|x|-1)>0,\\ (x-2)(x+2)<0,\\ (2|x|)^2-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|-1>0,\\ x\in(-2;\,2),\\ (2x-1)(2x+1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x+1)>0,\\ x\in(-2;\,2),\\ (2x-1)(2x+1)>0\end{cases}$$



$x\in(-2;\,-1)\cup(1;\,2).$

Ответ: $(-2;\,-1)\cup(1;\,2).$

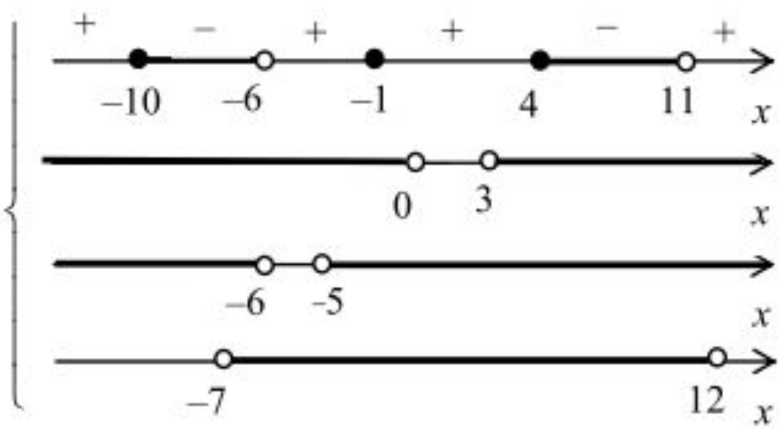
Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{\left(\log_2\left(x^2-3x\right)-2\right)\left(\log_5\left(x^2+11x+30\right)-\log_5 4-1\right)}{\log_3\left(x+7\right)\cdot\log_{0,7}\left(12-x\right)}\le 0$$

Решение. Применим МЗМ.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(\log_2\left(x^2-3x\right)-\log_2 4\right)\left(\log_5\left(x^2+11x+30\right)-\log_5 20\right)}{\left(\log_3(x+7)-\log_3 1\right)\left(\log_{0,7}(12-x)-\log_{0,7} 1\right)} \le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(2-1)\left(x^2-3x-4\right)(5-1)\left(x^2+11x+30-20\right)}{(3-1)(x+7-1)(0,7-1)(12-x-1)} \le 0, \\ x^2-3x>0, \\ x^2+11x+30>0, \\ x+7>0,\ 12-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-4)\,(x+1)^2(x+10)}{(x+6)(x-11)} \le 0, \\ x(x-3)>0, \\ (x+5)(x+6)>0, \\ x\in(-7;\,12). \end{cases}$$



$$x \in (-7;\,-6)\cup\{-1\}\cup[4;\,11).$$

Ответ: $(-7;\,-6)\cup\{-1\}\cup[4;\,11)$.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМ ОСНОВАНИЕМ

6.1. Условия равносильности для МЗМ

1. $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0 \;\Leftrightarrow\; 10^{f(x)\lg a(x)} - 10^{g(x)\lg a(x)} \vee 0 \;\Leftrightarrow$

$(10-1)\big(f(x)\lg a(x) - g(x)\lg a(x)\big) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \big(\lg a(x) - \lg 1\big)\big(f(x) - g(x)\big) \vee 0 \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big) \vee 0 \\ a(x) > 0\end{cases}$$

Вывод: $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}(a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big) \vee 0, \\ a(x) > 0.\end{cases}$

2. $a_1(x)^{f(x)} - a_2(x)^{f(x)} \vee 0 \;\Big|:\; a_2(x)^{f(x)}$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}\right)^{f(x)} - \left(\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}\right)^{0} \vee 0, \\ a_1(x) > 0,\; a_2(x) > 0\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\left(\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)} - 1\right)\big(f(x) - 0\big) \vee 0, \\ a_1(x) > 0,\; a_2(x) > 0\end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\big(a_1(x) - a_2(x)\big)\cdot f(x) \vee 0, \\ a_1(x) > 0,\; a_2(x) > 0\end{cases}$$

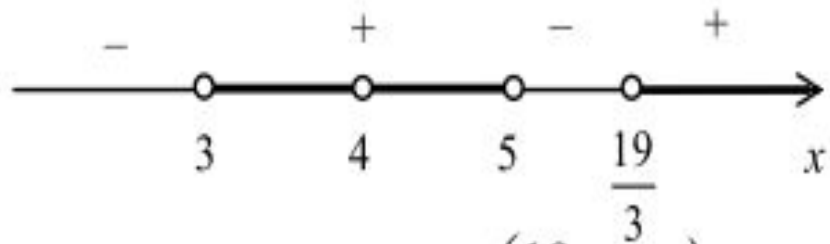
Вывод: $a_1(x)^{f(x)} - a_2(x)^{f(x)} \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\big(a_1(x) - a_2(x)\big)\cdot f(x) \vee 0, \\ a_1(x) > 0,\; a_2(x) > 0\end{cases}$

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt[5]{|x-4|^{x+2}} < \sqrt{|x-4|^{x-3}}$ (1

Решение. Применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} |x-4|^{2(x+2)} - |x-4|^{5(x-3)} < 0, \\ |x-4| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x-4|-1)(2x+4-5x+15) < 0, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-4-1)(x-4+1)(3x-19) > 0, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-3)(3x-19) > 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$$



$x \in (3;\, 4) \cup (4;\, 5) \cup \left(\dfrac{19}{3};\, +\infty\right).$

Ответ: $(3;\, 4) \cup (4;\, 5) \cup \left(\dfrac{19}{3};\, +\infty\right).$