Метод рационализации и статистика сдачи ЕГЭ по математике

МОАУ “Лицей №6” г. Оренбург

Кузнецова С.Д.

Статистика результатов ЕГЭ по математике в России за 2011-2014 годы.

Год	Число сдававших	Минимальные баллы	Число 100-бальников	Средний балл	Не преодолели порог
2011	738 746	24 балла	205	47,49	4,9%
2012	831 068	24 балла	56	45,2	5,89%
2013	803 741	24 балла	538	48,7	6,2%
2014	708 668	20 баллов	64	39,63	

Число участников ЕГЭ по математике в 2015-2016 годах.

Год	Вид экзамена		Число участников, Не преодолевших минимальный балл на профильном экзамене
	Базовый	Профильный	
2015	396 000	521 000	21,1%
2016	561 000	439 000	15,3%

Базовый уровень

Год	2	3	4	5	Средний балл
2015	7,4%	21,4%	40%	31,2%	3,95
2016	4,7%	16,4%	39,5%	39,4%	4,14

Профильный уровень

Год	Ниже 27 баллов	27-40	40-80	80-100	Средний балл
2015	21,1%	26,6%	50,8%	1,5%	45,6
2016	15,3%	29,4%	52,7%	2,9%	51,9

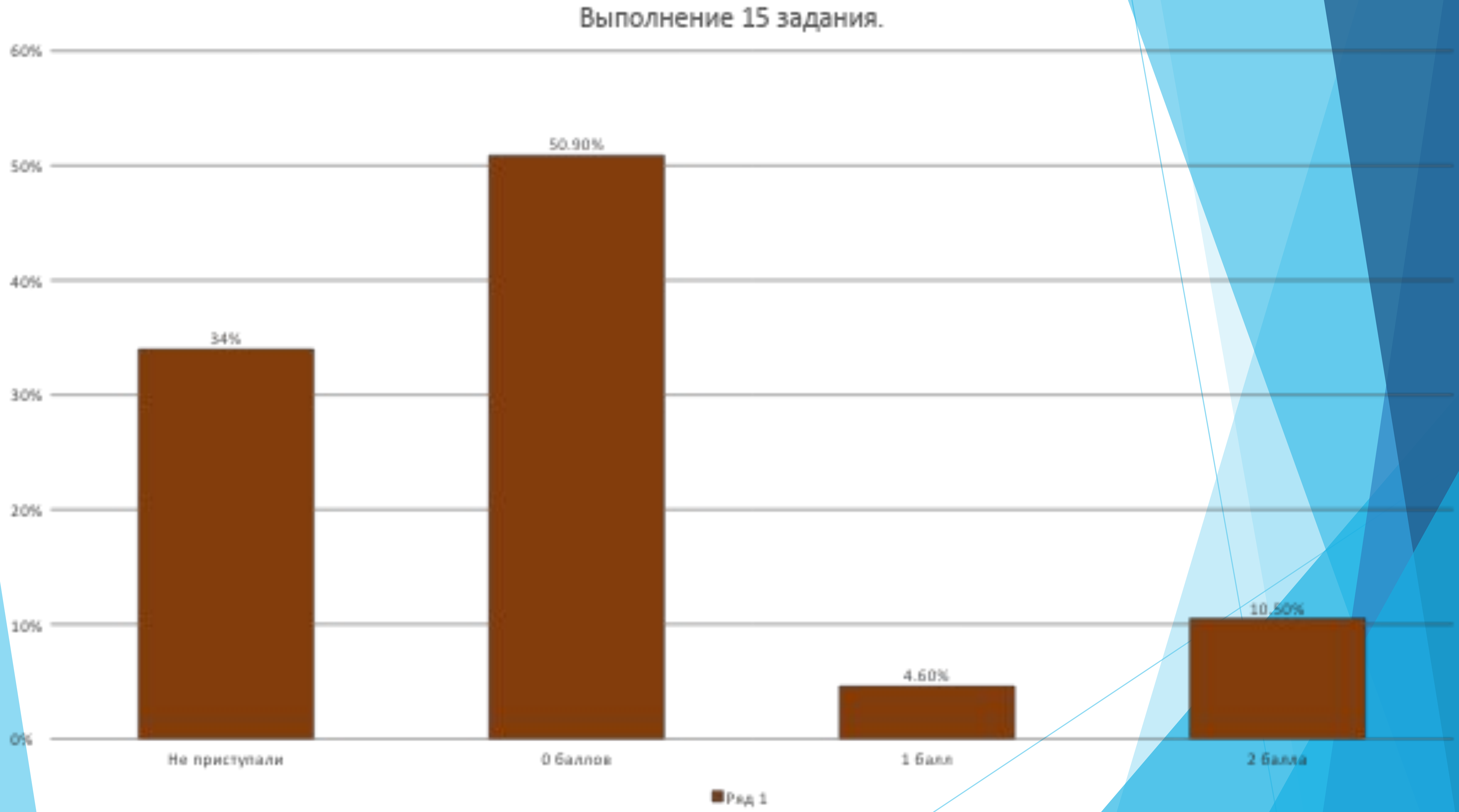
Анализ результатов решения заданий на ЕГЭ выпускниками РФ на основе материалов ФИПИ за 2016 год

Номер задания	Уровень сложности	Максимальный балл	Процент выполнения
1	Б	1	91,4%
2	Б	1	94,2%
3	Б	1	89,6%
4	Б	1	75,6%
5	Б	1	90,7%
6	Б	1	78,8%
7	Б	1	50,7%
8	Б	1	51,5%
9	П	1	59,1%
10	П	1	38,5%
11	П	1	38,4%
12	П	1	44,9%

Номер задания	Уровень сложности	Максимальный балл	Набранный балл	Процент выполнения
13	П	2	1	11,1%
			2	40,8%
14	П	2	1	4,6%
			2	1,2%
15	П	2	1	4,6%
			2	10,5%
16	П	3	1	1,6%
			2	0,31%
			3	0,85%
17	П	3	1	2,7%
			2	2,4%
			3	7,8%

18	B	4	1	2,3%
			2	1%
			3	<1%
			4	1%
19	B	4	1	23%
			2	4,8%
			3	<1%
			4	<1%


Гистограмма сдачи профильного уровня ЕГЭ по математике 2015 – 2016 годы.
60.00%
50.00%
40.00%
30.00%
20.00%
10.00%
0.00%
21.10%
26.60%
50.80%
1.50%
15.30%
29.40%
52.70%
2.90%
2015
2016
<27
27-40
40-80
80-100


Выполнение 15 задания.
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
34%
50.90%
4.60%
10.50%
Не приступали
0 баллов
1 балл
2 балла
Ряд 1

Метод рационализации

Данный метод встречается под названиями:

- метод декомпозиции
- метод замены множителей
- обобщение метода интервалов

Теоретическая основа

- Два неравенства F и G называют равносильными, если множества их решений совпадают.
- Если функция $f(x)$ строго возрастает, то знак выражения $f(x_1) - f(x_2)$ совпадает со знаком выражения $x_1 - x_2$.
- Если функция $f(x)$ строго убывает, то знак выражения $f(x_1) - f(x_2)$ совпадает со знаком выражения $x_2 - x_1$.

	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$log_a f - log_a g$ $log_a f - 1$ $log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$log_h f - log_h g$ $log_h - 1$ $log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$log_f h - log_g h$ $(g \neq 1, f \neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f - h^g \ (h > 0)$ $h^f - 1$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ $(f > 0, g > 0)$	$(f-g)h$
6	$\|f\| - \|g\|$	$(f-g)(f+g)$
7	$\sqrt[n]{f} - \sqrt[n]{g}$	$f - g$

№	Выражение	Рационализирующее выражение
1.	$\log_h f - \log_h g$	$(h - 1)(f - g)$
2.	$\log_f h - \log_g h$	$(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g - f)$
3.	$\log_h f \times \log_p q$	$(h - 1)(f - 1)(p - 1)(q - 1)$
4.	$\log h f + \log_h g$	$((f \times g) - 1)(h - 1)$
5.	$f^h - g^h$	$(f - g)h$
6.	$h^f - h^g$	$(h - 1)(f - g)$
7.	$\lvert f \rvert - \lvert g \rvert$	$(f - g)(f + g)$
8.	$\sqrt[n]{f} - \sqrt[n]{g}$	$f - g$

Метод рационализации для логарифмических неравенств

Правило: Знак $\log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения (a-1)(f(x)-1) в ОДЗ.

Правило: Знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения (a-1)(f(x)-g(x)) в ОДЗ.

Неравенства для логарифмов с переменным основанием

$$1)\ \log_{a(x)} f(x) > 0\ (<0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1) > 0\ (<0). \end{cases}$$

$$2)\ \log_{a(x)} f(x) \ge 0\ (\le 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \ne 1, \\ f(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1) \ge 0\ (\le 0). \end{cases}$$

$$3)\ \log_{a(x)} f(x) > (<) \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0\ (<0). \end{cases}$$

Логарифмические неравенства

Вывод: $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \vee 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ 0 < a(x) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-g(x)}{a(x)-1} \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0 \end{cases}$$

Метод рационализации для логарифмических неравенств

Правило: Решение неравенств вида

$$\frac{\log_a f(x) - \log_a g(x)}{h(x)} \geq 0$$

сводится к решению неравенства в ОДЗ

$$\frac{(a-1)(f(x)-g(x))}{h(x)} \geq 0$$

Правило: Решение неравенств вида

$$\frac{f(x)(\log_a g_1(x) - \log_a g_2(x))}{\log_в g_3(x)} > 0$$

сводится к решению неравенства в ОДЗ

$$\frac{f(x)(a-1)(g_1(x)-g_2(x))}{(в-1)(g_3(x)-1)} > 0$$

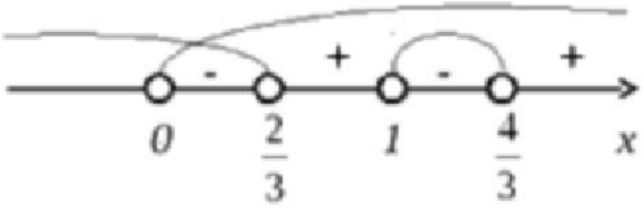
Решите неравенство:

$$\boxed{\log_{|3x-3|}(25^x-9^x)<\log_{|3x-3|}(5^x+3^x)+\log_{|3x-3|}(5^{x-1}+3^{x-1})(1)}$$

$$(1)\Leftrightarrow \log_{|3x-3|}(5^x-3^x)(5^x+3^x)<\log_{|3x-3|}(5^x+3^x)(5^{x-1}+3^{x-1})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|3x-3|\neq 0,\\ 5^x-3^x>0,\\ (|3x-3|-1)(5^x-3^x-5^{x-1}-3^{x-1})<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1,\\ \left(\frac{5}{3}\right)^x-1>0,\\ (|3x-3|-1)(4\cdot 5^{x-1}-4\cdot 3^{x-1})<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1,\\ x>0,\\ (3x-4)(3x-2)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}-\left(\frac{5}{3}\right)^0\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1,\\ x>0,\\ (x-\frac{4}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1)<0\end{cases}$$



Ответ: (0;2/3)∪(1;4/3).

Решите неравенство: 1. $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)\le 0$

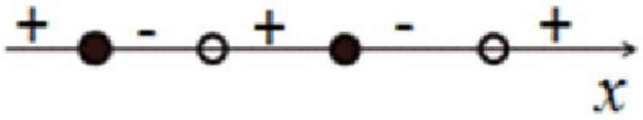
Решение

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)\le 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)-\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}1\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2+x-2>0, \dfrac{2x+2}{5x-1}>0, \\ \dfrac{2x+2}{5x-1}\ne 1, \\ \left(\dfrac{2x+2}{5x-1}-1\right)\left(10x^2+x-2\right)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x<-0{,}5)\,\text{или}\,(x>0{,}4), \\ (x<-1)\,\text{или}\,(x>0{,}2), \\ \dfrac{2x+2-5x+1}{5x-1}\ne 0, \\ \dfrac{(2x+2-5x+1)\left(10x^2+x-3\right)}{5x-1}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x<-1)\,\text{или}\,(x>0{,}4), \\ \dfrac{-3x+3}{5x-1}\ne 0, \\ \dfrac{(x-1)(x+0{,}6)(x-0{,}5)}{5x-1}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x<-1)\,\text{или}\,(x>0{,}4), \\ x\ne 1, x\ne 0{,}2, \\ (x\le -0{,}6)\,\text{или}\,(0{,}2<x<0{,}5)\,\text{или}\,(x>1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x<-1)\,\text{или}\,(0{,}4<x\le 0{,}5)\,\text{или}\,(x>1)$$



Решите неравенство:

$$\frac{\log_5(6x+4)}{\log_{0,7}(8x+9)} \geq 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{(5-1)\cdot(6x+4-1)}{(0,7-1)\cdot(8x+9-1)} \geq 0, \\ 8x+9 \neq 1, \\ 6x+4>0, \\ 8x+9>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{6x+3}{8x+8} \leq 0, \\ x > -\dfrac{2}{3}, \\ x > -\dfrac{9}{8}; \end{cases}$$

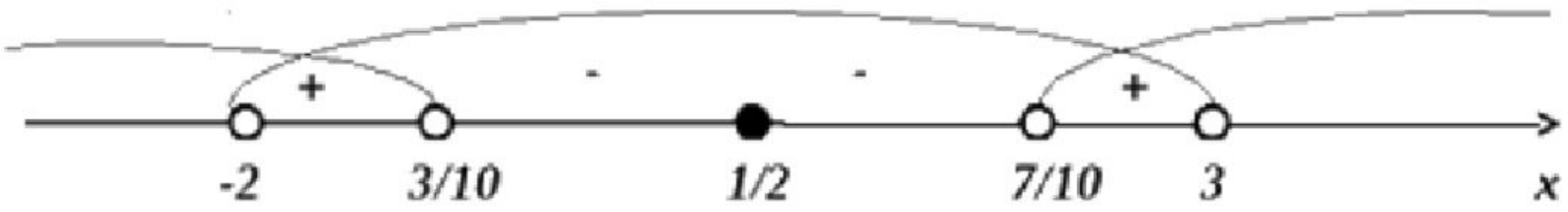
Ответ : $(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}]$

Решите неравенство:

$$\frac{\lg(3x^2-3x+7)-\lg(6+x-x^2)}{(10x-7)(10x-3)} \geq 0(1)$$

Решение: а)ОДЗ : $\begin{cases} 3x^2-3x+7>0, \\ -x^2+x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R, \\ -2<x<3 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<3.$

б) $(1) \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-3x+7-6-x+x^2}{(x-\frac{7}{10})(x-\frac{3}{10})} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \dfrac{(2x-1)^2}{(x-\frac{7}{10})(x-\frac{3}{10})} \geq 0$



Ответ: $(-2;\frac{3}{10}) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (\frac{7}{10};3).$

Решите неравенство:

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Запишем неравенство в виде $\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3) < 0 \\ 2x+3 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1)(x-3) < 0 \\ x > -1{,}5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-1{,}5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.

Логарифмическое неравенство

Решить неравенство $\dfrac{\log_2(4x+3)\cdot\log_5(2x+5)}{(\log_3 6x)\cdot\log_4 x}\ge 0.$

Решение. Представим каждый из логарифмов в виде разности двух логарифмов, воспользуемся равносильными преобразованиями.

$$\frac{\log_2(4x+3)\cdot\log_5(2x+5)}{(\log_3 6x)\cdot\log_4 x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_2(4x+3)-\log_2 1)(\log_5(2x+5)-\log_5 1)}{(\log_3 6x-\log_3 1)(\log_4 x-\log_4 1)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(4x+3-1)(2x+5-1)}{(6x-1)(x-1)}\ge 0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(4x+2)(2x+4)}{(6x-1)(x-1)}\ge 0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{6}\right)\cup(1;+\infty).$$

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{6}\right)\cup(1;+\infty).$

Решить неравенство:

$$\frac{\log_3(x+\frac{4}{5})}{\log_7(x^2+2x+\frac{7}{16})} < 0$$

Решение.

Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x+\dfrac{4}{5} > 0, \\ x^2-2x+\dfrac{7}{16} > 0, \\ x^2-2x+\dfrac{7}{16} \neq 1; \end{cases}$$

Запишем неравенство используя метод рационализации в виде

$$\frac{(3-1)(x+\frac{4}{5}-1)}{(7-1)(x^2-2x+\frac{7}{16}-1)} < 0, \qquad \frac{x-\frac{1}{5}}{\left(x+\frac{1}{14}\right)\left(x-\frac{9}{4}\right)} < 0,$$

Ответ:

$$\left(-\frac{4}{5};-\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$$

Решить неравенство: $\log_{x+\frac{5}{2}}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0$

Решение.

Найдем область определения неравенства

$$\begin{cases} x+\dfrac{5}{2} > 0, \\ x+\dfrac{5}{2} \neq 1, \\ \dfrac{x-5}{2x-3} \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\dfrac{5}{2}, \\ x \neq -\dfrac{3}{2}, \\ x \neq 5, \\ x \neq \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; 5\right); (5; +\infty)$$

Применим метод рационализации

$$\left(x+\frac{5}{2}-1\right)\left(\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2-1\right) > 0$$

$$\frac{(x+\frac{3}{2})(3x^2-2x-16)}{(2x-3)^2} < 0,$$

$$\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+2)(3x-8)}{(2x-3)^2} < 0$$

$$\left(-\frac{5}{2};-2\right)\cup\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{8};\frac{8}{3}\right)$$

С учетом области определения

$$\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right);\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};5\right);(5;+\infty)$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{2};\ -2\right);\left(-\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2};\ \frac{8}{3}\right)$

Решить неравенство:

$$\frac{\log_9 x + 4}{1 + \log_9 x} \leq 4\log_x 3 - 1$$

Решение.

Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_9 x \neq -1. \end{cases}$$

$$\frac{\log_9 x + 4}{1 + \log_9 x} - \frac{2}{\log_9 x} + 1 \le 0, \qquad \log_9 x = t,$$

$$\frac{t+4}{1+t} - \frac{2}{t} + 1 \le 0,$$

$$\frac{t^2 + 4t - 2 - 2t + t^2 + t}{t(t+1)} \le 0,$$

$$\frac{2(t+2)(t-\frac{1}{2})}{t(t+1)} \le 0,$$

$$\frac{2t^2 + 3t - 2}{t(t+1)} \le 0,$$

$$\frac{(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{81})(x - 3)}{(\log_9 x - \log_9 1)\left(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{9}\right)} \le 0,$$

Применим метод рационализации

$$\frac{\left(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{81}\right)(x-3)}{(\log_9 x - \log_9 1)\left(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{9}\right)} \le 0,$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{81}\right)(x-3)}{(x-1)\left(x-\frac{1}{9}\right)} \le 0$$

Ответ: $\left[\frac{1}{81}; \frac{1}{9}\right) \cup (1; 3]$

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) \geqslant \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(2x^2+x-1)-\log_2(11x-6-3x^2)}{\log_2\dfrac{3x-1}{x+2}} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x^2+x-1)-(11x-6-3x^2)}{\dfrac{3x-1}{x+2}-1} \geq 0, \\ 2x^2+x-1>0, \\ 11x-6-3x^2>0, \\ \dfrac{3x-1}{x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{2x-3} \geq 0, \\ \dfrac{2}{3}<x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 1,5<x<3. \end{array}\right.$$

Метод рационализации для показательных неравенств

Правило: Знак разности $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения

$$(a-1)(f(x)-g(x)) > 0.$$

Правило: Для любой функции $h(x)$ имеет место условие равносильности

$$\frac{a^{f(x)} - a^{g(x)}}{h(x)} \geq 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{(a-1)(f(x)-g(x))}{h(x)} \geq 0$$

Решите неравенство:

$$\frac{3^{x+1}-1}{\log_3 x-2}\le 0$$

ОДЗ $\begin{cases} x>0 \\ x\ne 9 \end{cases}$

$$\frac{3^{x+1}-3^0}{\log_3 x-\log_3 9}\le 0$$

$$\frac{(3-1)(x+1-0)}{(3-1)(x-9)}\le 0$$

$$\frac{x+1}{x-9}\le 0$$

Ответ: $x\in(0;9)$

Решите неравенство:

$$21^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \le 0,$$

$$3^x \cdot 7^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \le 0,$$

$$3^x(7^x - 1) - 9(7^x - 1) \le 0,$$

$$(7^x - 1)(3^x - 9) \le 0,$$

$$(7^x - 7^0)(3^x - 3^2) \le 0,$$

$$(x - 0)(x - 2) \le 0,$$

$$x(x - 2) \le 0,$$

Решить неравенство:

$$\frac{x^2+x-2}{(3^x-1)(2^{x^2}-16)} \geq 0$$

Решение.

$$\frac{x^2+x-2}{(3^x-1)(2^{x^2}-2^4)} \geq 0$$

Запишем неравенство используя метод рационализации в виде

$$\frac{x^2+x-2}{(3-1)(x-0)(2-1)(x^2-4)} \geq 0,$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x(x^2-4)} \geq 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{x-1}{x(x-2)} \geq 0$$

Ответ: (0;1];(2;+∞)

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{6-x} \dfrac{x^4}{x^2-12x+36} \le 0 \\ \dfrac{25\cdot 0{,}5^{x-1} - 2^{x-2}}{2^{x+2}-4^x} \ge 0{,}5^{x+2}, \end{cases}$$

Решим первое неравенство

ОДЗ: (-∞;-5)U(-5;0)U(0;6).

$$\frac{\lg x^4 - \lg(x^2-12x+36)}{\lg(6-x)-\lg 1} \le 0,\quad \frac{x^4-(x^2-12x+36)}{(6-x)-1} \le 0,\quad \frac{x^4-(x-6)^2}{5-x} \le 0,$$

[-3;2]U(5;+∞).

Решим второе неравенство

$$\frac{25\cdot 2^{-x+1}-2^{x-2}}{2^{x+2}-2^{2x}} - 2^{-x-2} \ge 0.$$

$$\frac{25\cdot 2^{-x+1}-2^{x-2}-2^0+2^{x-2}}{2^{x+2}-2^{2x}} \ge 0.\quad \frac{25\cdot 2^{-x+1}-2^0}{2^{x+2}-2^{2x}} \ge 0.$$

Так как 25 = $2^{\log_2 25}$, то получим:

$$\frac{2^{-x+1+\log_2 25}-2^0}{2^{x+2}-2^{2x}} \ge 0.\quad \frac{-x+1+\log_2 25}{x+2-2x} \ge 0.$$

(-∞;2)U[$\log_2 50$;+∞)

Решение системы с учётом ОДЗ: **[-3;0)U(0;2)U(5;6].**

Иррациональные неравенства

Правило: Если $g(x) \geq 0$, то знак разности $\sqrt{f(x)} - g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x) - g^2(x)$ в ОДЗ.

Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 6x} < 8 + 2x$

Решение.

Запишем неравенство в виде $\sqrt{x^2 - 6x} - (8+2x) < 0$

Заменим неравенство равносильной системой используя метод рационализации

$$\begin{cases} x^2 - 6x - (8 + 2x)^2 < 0, \\ 8 + 2x > 0, \\ x^2 - 6x \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(-\infty; -10\frac{2}{3}\right) \cup (-2; +\infty); \\ (-4; +\infty); \\ (-\infty; 0] \cup [6; +\infty). \end{cases}$$

Ответ: (-2;0] U [6;+∞)

Более сложные неравенства

Правило: Так как при $g(x) \geq 0$, знак разности $\sqrt{f(x)} - g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x) - g^2(x)$ в ОДЗ,
то получаются условия равносильности:

1) если $g(x) \geq 0$, то

$$\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ОДЗ} \quad \frac{f(x) - g^2(x)}{h(x)} \leq 0$$

$$h\,(x) < 0$$

2) если $g(x) < 0$, то

Правило: Так как знак разности $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности f(x) - g(x) в ОДЗ, то

$$\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{h(x)} \le 0 \quad \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \le 0$$

Правило: Знак разности $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности $f(x) - g(x)$ в ОДЗ.

Решить неравенство $\sqrt{2x+1} \le \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5}$

Решение.

Запишем неравенство в виде $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5} \le 0;$

Заменим неравенство равносильной системой используя метод рационализации

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1-(x^3-4x^2+x+5) \le 0, \\ 2x+1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2-x+4 \ge 0, \\ x \ge -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [-1;1] \cup [4;+\infty), \\ \left[-\frac{1}{2};+\infty\right); \end{cases}$$

Ответ: $[-\frac{1}{2};1] \cup [4;+\infty)$

Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1} \le 1$$

1. ОДЗ:
$$\begin{cases} 1-3x \ge 0, \\ 2+x \ge 0, \\ \sqrt{2+x}-1 \ne 0. \end{cases}$$
[-2; $\frac{1}{3}$]

$$\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1}-1 \le 0, \quad \frac{\sqrt{1-3x}-1-\sqrt{2+x}+1}{\sqrt{2+x}-1} \le 0$$

$$\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{1}} \le 0, \quad \frac{1-3x-2-x}{2+x-1} \le 0,$$

(-∞;-1)U[-$\frac{1}{4}$;+∞).

С учётом ОДЗ: [-2;-1) U[-$\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$].

Алгоритм метода рационализации

1. Выписать условия, задающие ОДЗ исходного неравенства.

2. Привести исходное неравенство к стандартному виду.

3. Указать область допустимых значений для получившегося неравенства.

4. Заменить все выражения на рациональные (используя специальную таблицу перехода к рациональным выражениям).

5. Решить полученное неравенство. (Например, методом интервалов.)

6. Записать ответ полученного неравенства (он же является ответом исходного неравенства).

Спасибо за внимание