Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

11 класс

МАОУ СОШ № 13 города Тюмени

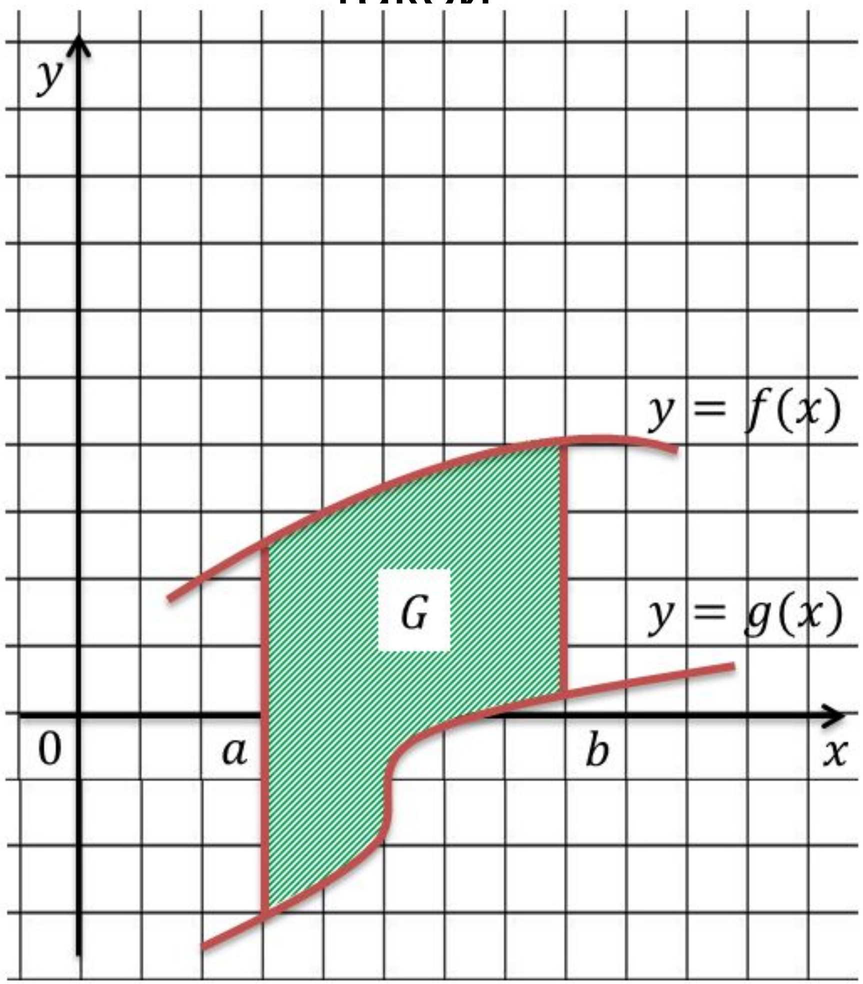
$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$ – геометрический смысл определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ - формула Ньютона-Лейбница

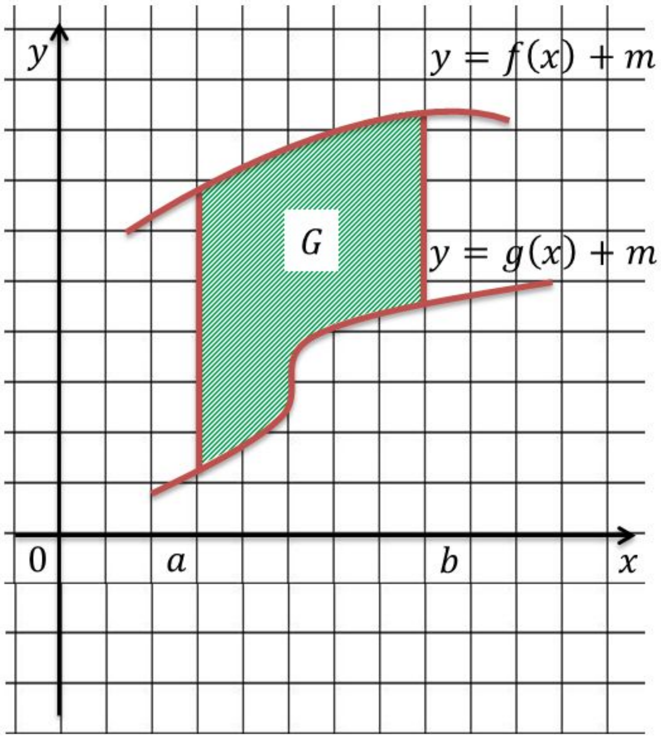
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

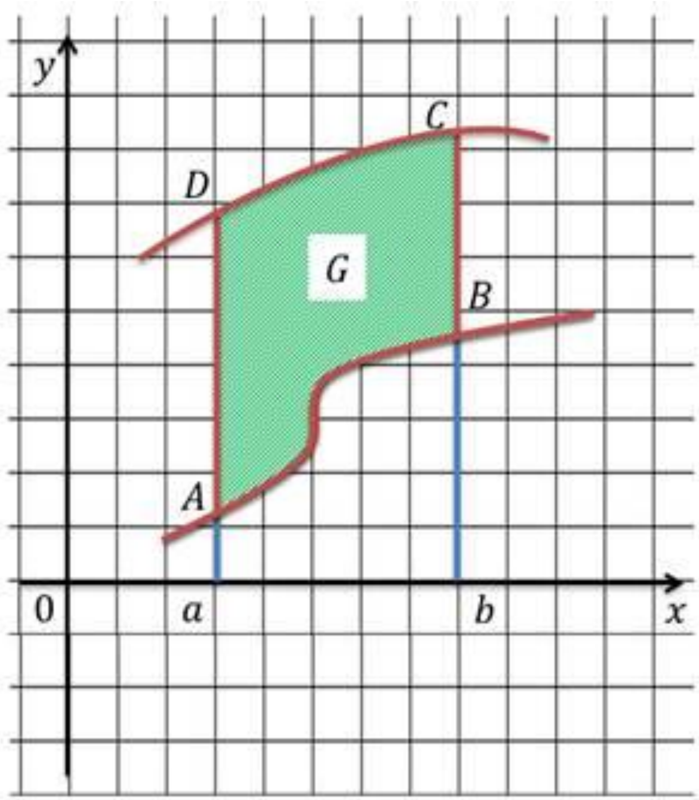
Но с помощью определенного интеграла можно вычислять площади не только криволинейных трапеций, но и плоских фигур более сложного вида, например, такой



Для того, чтобы вычислить площадь данной фигуры, выполним параллельный перенос фигуры на *m* единиц вверх так, чтобы она полностью оказалась расположенной в координатной плоскости выше оси абсцисс.



Теперь она ограничена сверху и снизу графиками функции *y = f(x) + m* и *y = g(x) + m*, причем обе функции непрерывны и неотрицательны на отрезке *[a; b]*. Тогда легко заметить, что площадь нашей фигуры можно найти как разность площадей криволинейных трапеций. Запишем это:



$$S = S_{ABCD} = S_{aDCb} - S_{aABb} =$$

$$= \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)dx =$$

$$= \int_a^b \big((f(x) + m) - (g(x) + m)\big)dx =$$

$$= \int_a^b (f(x) + m - g(x) - m)dx =$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Итак, площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и таких, что для любого x из отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x) \leq f(x)$, вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx}$$

Пример

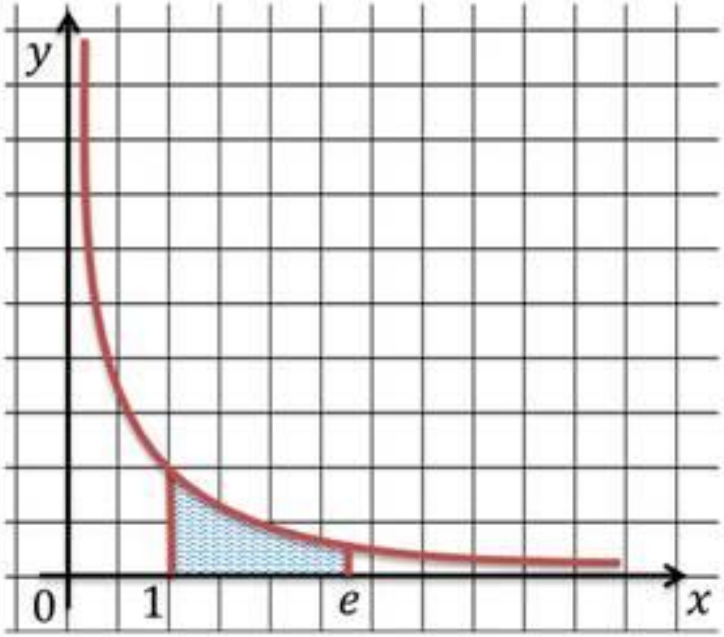
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0, x = 1, x = e, y = \frac{1}{x}$.

Решение:

$$S = \int_1^e \frac{dx}{x}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln|x|$$

$$S = (\ln|x|)\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$



Ответ: $S = 1$.

Пример

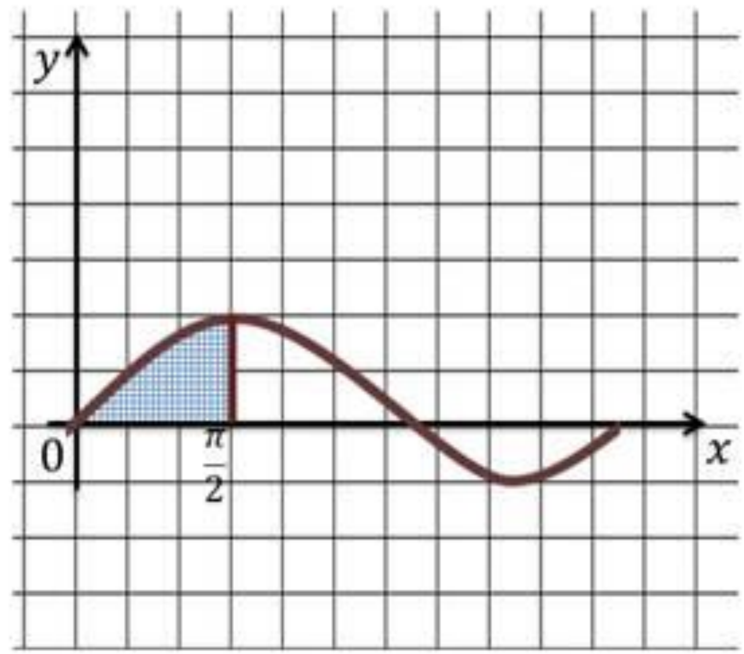
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Решение:

$$S = \int_{1}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$(-\cos x)' = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$$

$$S = (-\cos x)\Big|_{1}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$$



Ответ: $S = 1$.

Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x$, $y = -(x-4)^2$.

Решение:

$x^2 - 4x = -(x-4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + (x-4)^2 = 0$

$2x^2 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 & y_1 = -4 \\ x_2 = 4 & y_2 = 0 \end{cases}$

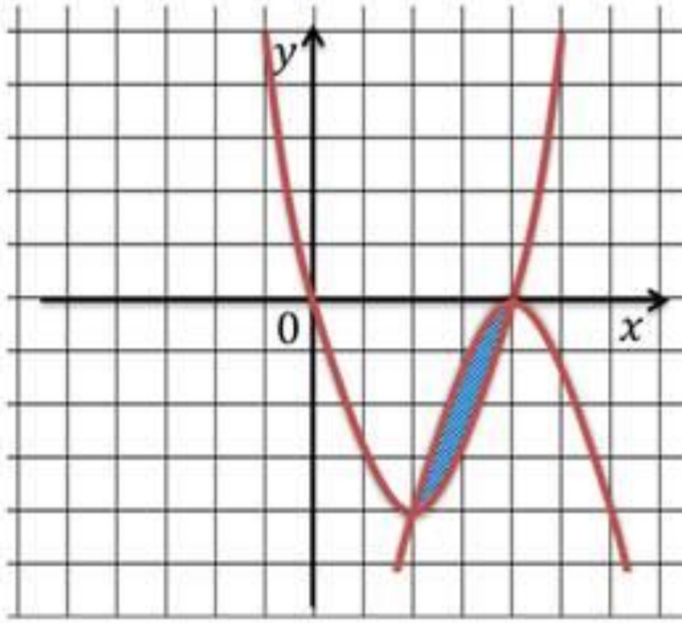
$$S = \int_2^4 (-(x-4)^2 - (x^2 - 4x))dx =$$

$$= \int_2^4 (-2x^2 + 12x - 16)dx = -2\int_2^4 x^2dx +$$

$$+12\int_2^4 xdx - 16\int_2^4 1 \cdot dx = -2\left(\frac{x^3}{3}\Big|_2^4\right) + 12\left(\frac{x^2}{2}\Big|_2^4\right) -$$

$$-16\left(x\Big|_2^4\right) = -2 \cdot \frac{56}{3} + 12 \cdot 6 - 16 \cdot 2 = 2\frac{2}{3}$$

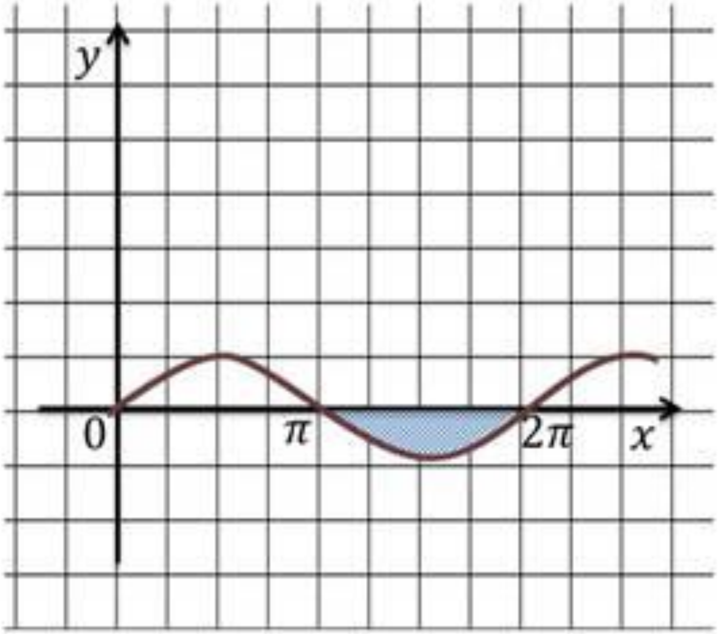
Ответ: $S = 2\frac{2}{3}$.



Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x \in [\pi; 2\pi]$.

Решение:



$$S = \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx\right| = \left|(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right| =$$

$$= |-1-1| = 2$$

Ответ: $S = 2$.

Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0{,}5x^2 + 2$, $x = 0$, касательной к графику функции $y = 0{,}5x^2 + 2$ в точке $x = -2$.

Решение:

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$

$f(a) = 0{,}5 \cdot (-2)^2 + 2 = 4$

$f(x) = x \Rightarrow f'(a) = -2$

$y = 4 - 2(x + 2) = -2x$

$$S = \int_{-2}^{0} (0{,}5x^2 + 2)dx - S_\Delta = 0{,}5 \int_{-2}^{0} x^2 dx +$$

$$+2 \int_{-2}^{0} dx - 4 = 0{,}5\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{0}\right) + 2\left(x\bigg|_{-2}^{0}\right) - 4 =$$

$$= 0{,}5 \cdot \frac{8}{3} + 2 \cdot 2 - 4 = 1\frac{1}{3}$$

Ответ: $S = 1\frac{1}{3}$.