ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменная содержится под знаками тригонометрических функций. К их числу прежде всего относятся простейшие тригонометрические уравнения, т.е. уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg x = a$, где a - действительное число.

К настоящему моменту мы знаем, что:

- Если $|a|\leq 1$, то решения уравнения $\cos x=a$ имеют вид $x = \pm \arccos a+2\pi n$,
- Если $|a|\leq 1$, то решения уравнения $\sin x =a$ имеют вид $x=(-1)^n \arcsin a+\pi n$,

  или, что то же самое, $x=\arcsin a+2\pi k$, $x=\pi-\arcsin a+2\pi k$;
- Если $|a|>1$, то уравнения $\cos x=a$, $\sin x=a$ не имеют решений.

- Решения уравнения $tgx=a$ для любого значения а имеют вид $x=arctga+\pi n$;
- Особо важны частные случаи:

$sinx=0$, $x=\pi n$;

$sinx=1$, $x=\pi/2+2\pi n$;

$sinx=-1$, $x=-\pi/2+2\pi n$;

$cosx=0$, $x=\pi/2+\pi n$;

$cosx=1$, $x=2\pi n$;

$cosx=-1$, $x=\pi+2\pi n$.

Во всех перечисленных формулах подразумевается, что параметр (n, k) принимает любые целочисленные значения ($n \in Z$, $k \in Z$).

К простейшим относят обычно и уравнения вида $T(kx+m)=a$, где T – знак какой-либо тригонометрической функции.

Пример 1.

Решить уравнения:

а) $\sin 2x=1/2$;

$2x=(-1)^n \arcsin 1/2+\pi n,\ n \in Z$;

$2x=(-1)^n \pi/6+\pi n,\ n \in Z$;

$x=(-1)^n \pi/12+\pi n/2,\ n \in Z$.

б) $\cos 3x=-\sqrt{2}/2$;

$3x=\pm\arccos(-\sqrt{2}/2)+2\pi n,\ n \in Z$;

$3x=\pm(\pi-\arccos\sqrt{2}/2)+2\pi n,\ n \in Z$;

$3x=\pm(\pi-\pi/4)+2\pi n,\ n \in Z$;

$3x=\pm 3\pi/4+2\pi n,\ n \in Z$;

$x=\pm\pi/4+2\pi n/3,\ n \in Z$.

в)

$tg(4x-\pi/6)=\sqrt{3}/3;$

$4x-\pi/6=arctg\sqrt{3}/3+\pi n,\ n \in Z;;$

$4x-\pi/6=\pi/6+\pi n,\ n \in Z;;$

$4x=\pi/6+\pi/6+\pi n,\ n \in Z;$

$4x=\pi/3+\pi n,\ n \in Z;$

$x=\pi/12+\pi n/4,\ n \in Z.$

Пример 2.

Найти те корни уравнения $\sin 2x=1/2$, которые принадлежат отрезку $[0; \pi]$.

Решение. Сначала решим уравнение в общем виде: $\sin 2x=1/2$;

$$2x=(-1)^n \arcsin 1/2+\pi n,\ n \in Z;$$

$$2x=(-1)^n \pi/6+\pi n,\ n \in Z;$$

$$x=(-1)^n \pi/12+\pi n/2,\ n \in Z.$$

Далее придадим параметру n последовательно значения 0,1,2,…,-1,-2,… и подставим эти значения в общую формулу корней.

Если $n=0$, то $x=(-1)^0\pi/12+0=\pi/12$,

$\pi/12 \in [0; \pi]$.

Если $n=1$, то $x=(-1)^1\pi/12+\pi/2=-\pi/12+\pi/2=5\pi/12$,

$5\pi/12 \in [0; \pi]$.

Если $n=2$, то $x=(-1)^2\pi/12+\pi=\pi/12+\pi=13\pi/12$,

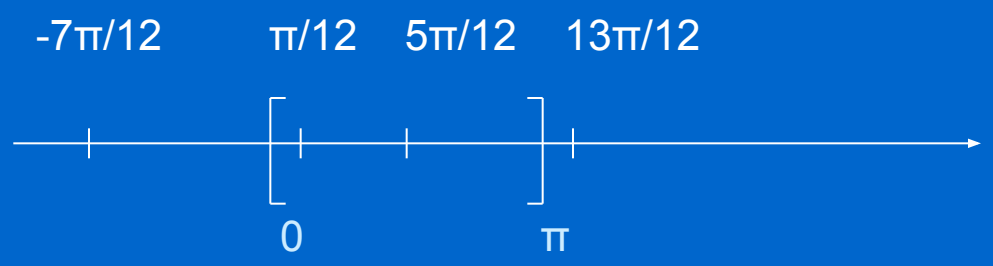
$13\pi/12 \in [0; \pi]$.

Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы

при $n=3,4,\ldots$.

Пусть теперь $n= -1$,
тогда $x=(-1)^{-1}\pi/12-\pi/2= -\pi/12-\pi/2= -7\pi/12$.
Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.
Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n= -2,-3,\ldots$.

На рисунке представлена геометрическая интерпретация проведенных рассуждений.



Итак, заданному отрезку [0; π] принадлежат те корни уравнения, которые получаются из общей формулы при следующих значениях параметра n: n=0, n=1.

Эти корни таковы: π/12, 5π/12.

Ответ: π/12; 5π/12.

№18.2(6)

№18.3(г)

№18.4(б,в)

№18.13(б)

Домашнее задание: №18.2(в), №18.3(а), №18.4(а, г), №18.13(г), №18.15(б, в, г).