

Техника

интегрирования

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ
МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Устные упражнения

Найдите интегралы, поясняя, какие правила интегрирования применяли.

$$\int \left(x^3 + \cos x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^4}{4} + \sin x + \frac{1}{x} + C$$

интегрирование суммы

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{3} - 4x \right)^5 dx &= -\frac{1}{4 \cdot 6} \left(\frac{1}{3} - 4x \right)^6 + C = \\ &= -\frac{1}{24} \left(\frac{1}{3} - 4x \right)^6 + C \end{aligned}$$

правило нахождения
первообразной сложной
функции

$$\int \frac{1}{5} \ell^x dx = \frac{1}{5} \ell^x + C$$

постоянный множитель можно
вынести за знак интеграла

$$\int \left(2 \sin 3x - \frac{3}{\sqrt{7x-1}} - \frac{2}{x} \right) dx =$$

$$= -\frac{2}{3} \cos 3x - \frac{6}{7} \sqrt{7x-1} - 2 \ln |x| + C$$

$$\int \frac{5}{\sin^2 \frac{x}{5}} dx = -25 \operatorname{ctg} \frac{x}{5} + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$\int (2 - \frac{1}{5}x)^7 dx = -\frac{5}{8} (2 - \frac{1}{5}x)^8 + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3}x) + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{dt}{t} =$$

$$t = \cos x$$

$$= -\ln |t| + C =$$

$$dt = -\boxed{\sin x dx}$$

$$\sin x dx = -dt$$

$$= -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \frac{3x^2 + \sqrt{2}}{5\sqrt[4]{x}} dx$$

Представим подинтегральную функцию в виде суммы

$$= \int \left(\frac{3x^2}{5x^{\frac{1}{4}}} + \frac{\sqrt{2}}{5x^{\frac{1}{4}}} \right) dx = \int \left(\frac{3}{5} x^{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{5} x^{-\frac{1}{4}} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{5} x^{\frac{11}{4}} \cdot \frac{4}{11} + \frac{\sqrt{2}}{5} x^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{4}{3} + C =$$

$$= \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^3} \left(\frac{3}{11} x^2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) + C$$

Метод подстановки:

$$\int \frac{\ell^x}{1+4\ell^{2x}} dx \quad \text{Пусть}$$

$$t = 2\ell^x$$

$$dt = 2\ell^x dx$$

$$\ell^x dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int \frac{\ell^x dx}{1+4\ell^{2x}} = \int \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \arctgt + C = \frac{1}{2} \arctg 2\ell^x + C$$

$$\int \frac{\ell^x}{1-2\ell^x} dx = \int \frac{dt}{-2(t)} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

$$t = 1-2\ell^x \qquad = -\frac{1}{2} \ln |t| + C =$$

$$dt = -2\ell^x dx$$

$$-\frac{1}{2} \ln |1-2\ell^x| + C$$

$$\ell^x dx = \frac{dt}{-2}$$

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

$$t = 1 + x^2$$

$$= \frac{1}{2} \ln |t| + C =$$

$$dt = 2x dt$$

$$x dt = \frac{dx}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Пусть

$$\int x \cos x dx = \begin{array}{l} u=x; dv=\cos x dx \\ du=dx, v=\sin x. \end{array}$$

$$\begin{aligned} & x \sin x - \int \sin x dx = \\ & = x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

$$\int \arctg x dx$$

$$u = \arctg x$$

$$\int \arctg x dx = x \cdot \arctg x - \int x \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$dv = dx$$

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= x \cdot \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2}$$

$$v = x$$

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\int \arctg x dx &= x \cdot \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = \\ &= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

Решите самостоятельно

$$\int \arccos x dx$$

$$\int \arcsin x dx$$

$$\int x \ln x dx$$

$$\int x e^x dx$$

$$\int \frac{6x^3 - x^2 \sqrt{5} + 1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\int x \sqrt[3]{3x^2 + 1} dx$$

$$\int (3x + 5) \sin x dx$$

$$\int (2x + 3) \cos x dx$$