

**Понятие функции,
способы её задания,
график функции.
Преобразование
графиков.**

Числовая функция

- **Определение.** *Числовой функцией* с областью определения D называется соответствие при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y , зависящее от x .
- x – *аргумент функции* (независимая переменная)
- Число y , соответствующее числу x , называют *значением функции* f в точке x и обозначают $f(x)$

- **Область определения** функции f обозначают $D(f)$.
- Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, таких, что x принадлежит области определения функции f , называют **областью значений** функции f и обозначают $E(f)$.

- **Объединением множеств A и B** называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B .
- Объединение множеств A и B обозначается так:

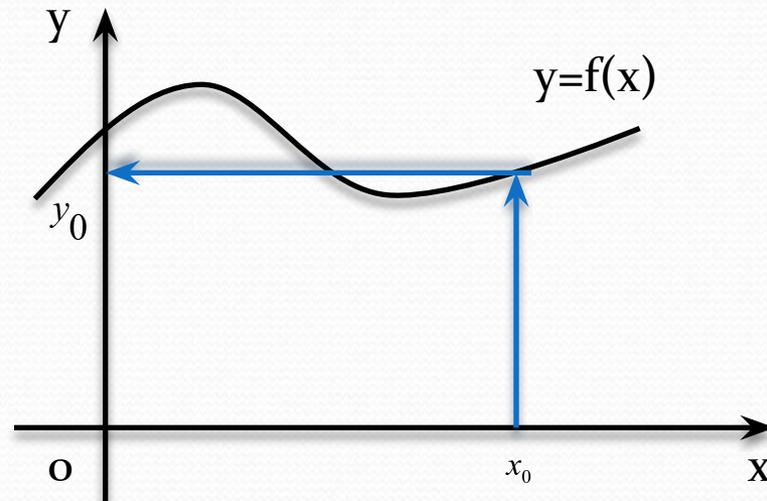
$$A \cup B$$

- Функции вида $f(x)=p(x)$, где $p(x)$ – многочлен, называют **целыми рациональными функциями**, а функции вида $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$

где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены, называют **дробно-рациональными функциями**.

График функции

- Графиком функции f называют множество всех точек (x, y) координатной плоскости, где $y=f(x)$, а x «пробегают» всю область определения функции f .



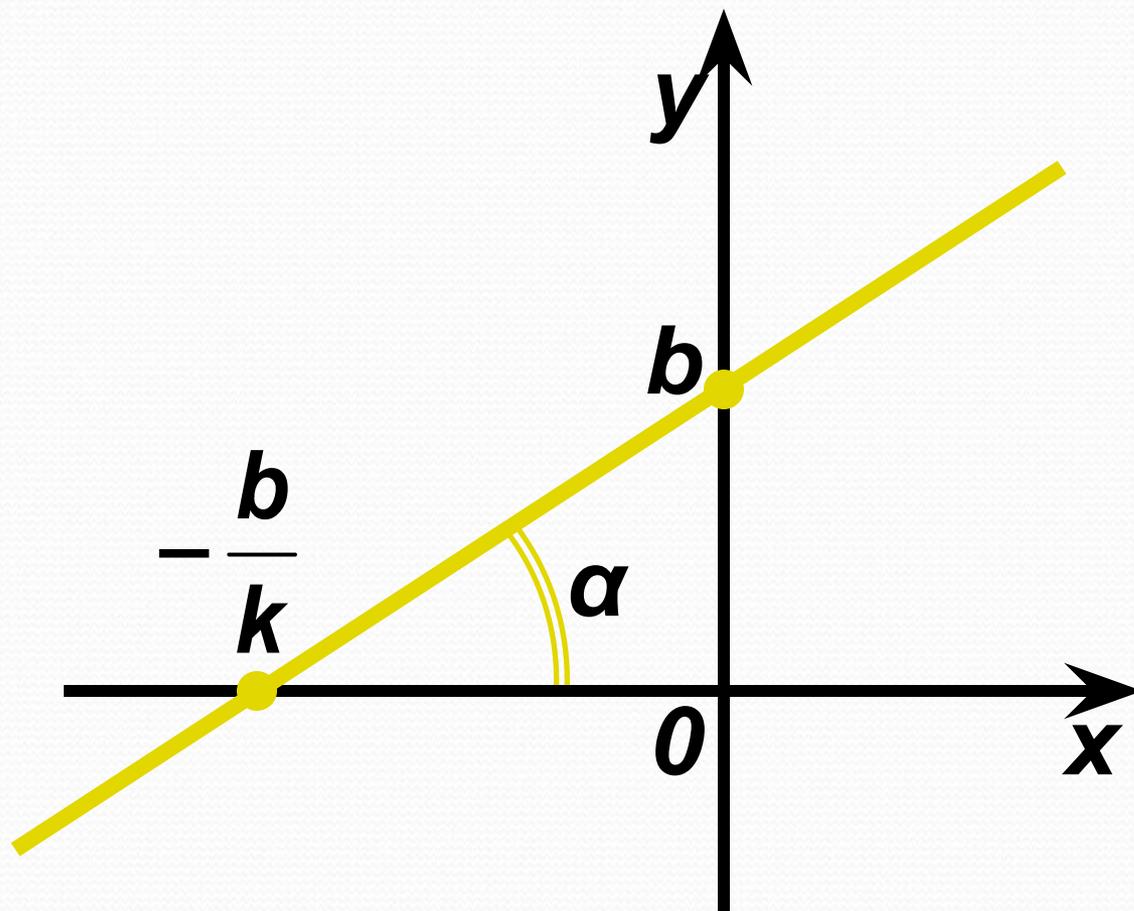
Линейная функция

$$y = kx + b$$

b – свободный коэффициент

k – угловой коэффициент

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$



Свойства линейной функции

$$y = kx + b$$

1° $D(y) = (-\infty; +\infty); E(y) = (-\infty; +\infty)$.

2° Если $b = 0$, то функция нечетная.

Если $b \neq 0$, то функция ни четная, ни нечетная.

3° Если $x = 0$, то $y = b$, если $y = 0$, то $x = \frac{-b}{k}$.

4° Если $k > 0$, то функция возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$.

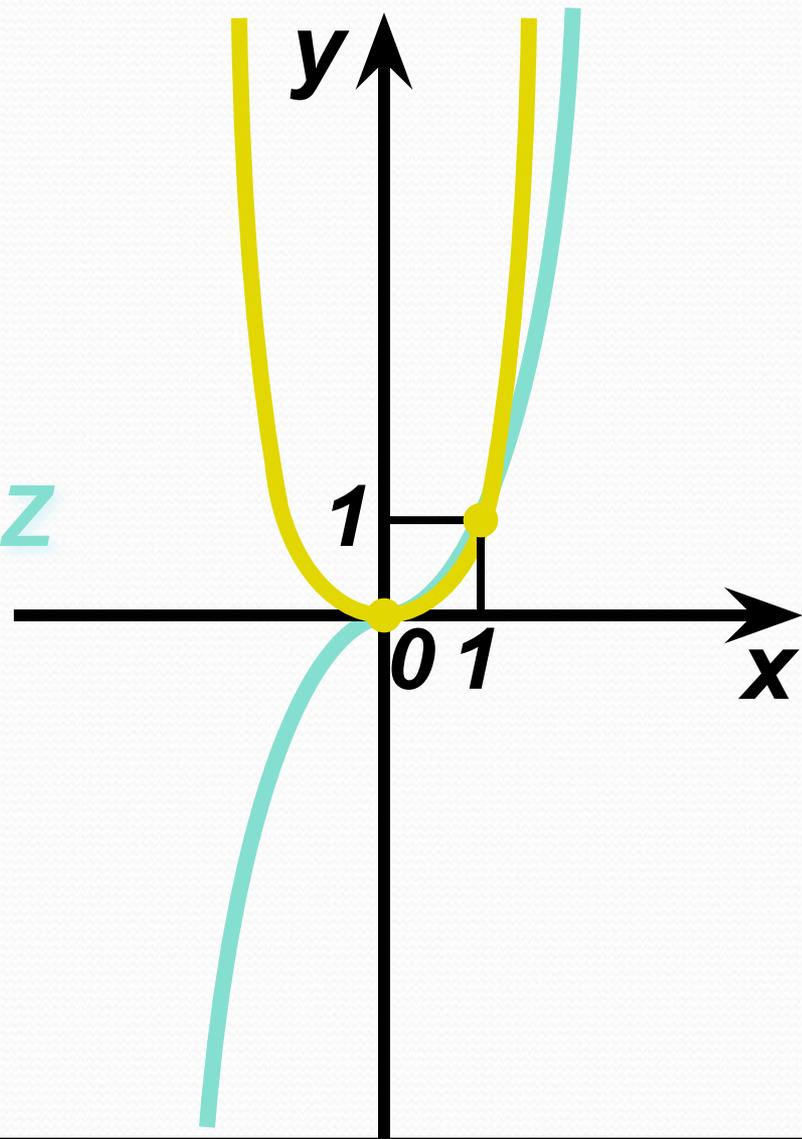
Если $k < 0$, то функция убывает при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Степенная функция

$$y = x^n$$

$$y = x^n, \text{ где } n = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = x^n, \text{ где } n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$$



Свойства степенной функции

$$y = x^n$$

Если $n = 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$

1° $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2° $E(y) = [0; +\infty)$.

3° Функция четная.

4° Если $x = 0$, то $y = 0$.

5° Функция возрастает
при $x \in [0; +\infty)$;
убывает при $x \in (-\infty; 0]$.

Если $n = 2k + 1$, где $k \in \mathbb{Z}$

1° $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2° $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

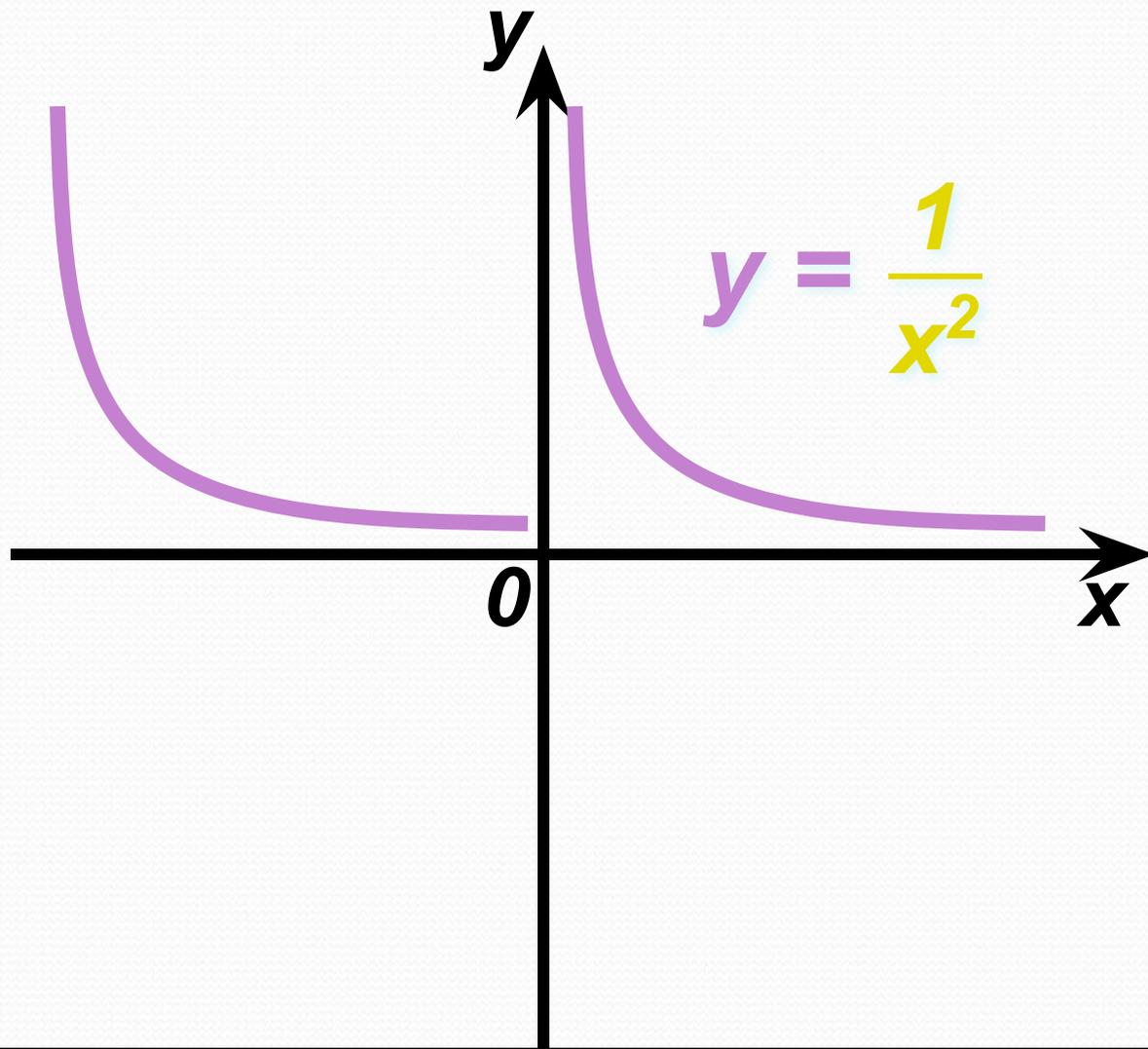
3° Функция нечетная.

4° Если $x = 0$, то $y = 0$.

5° Функция
возрастает
при $x \in (-\infty; +\infty)$.

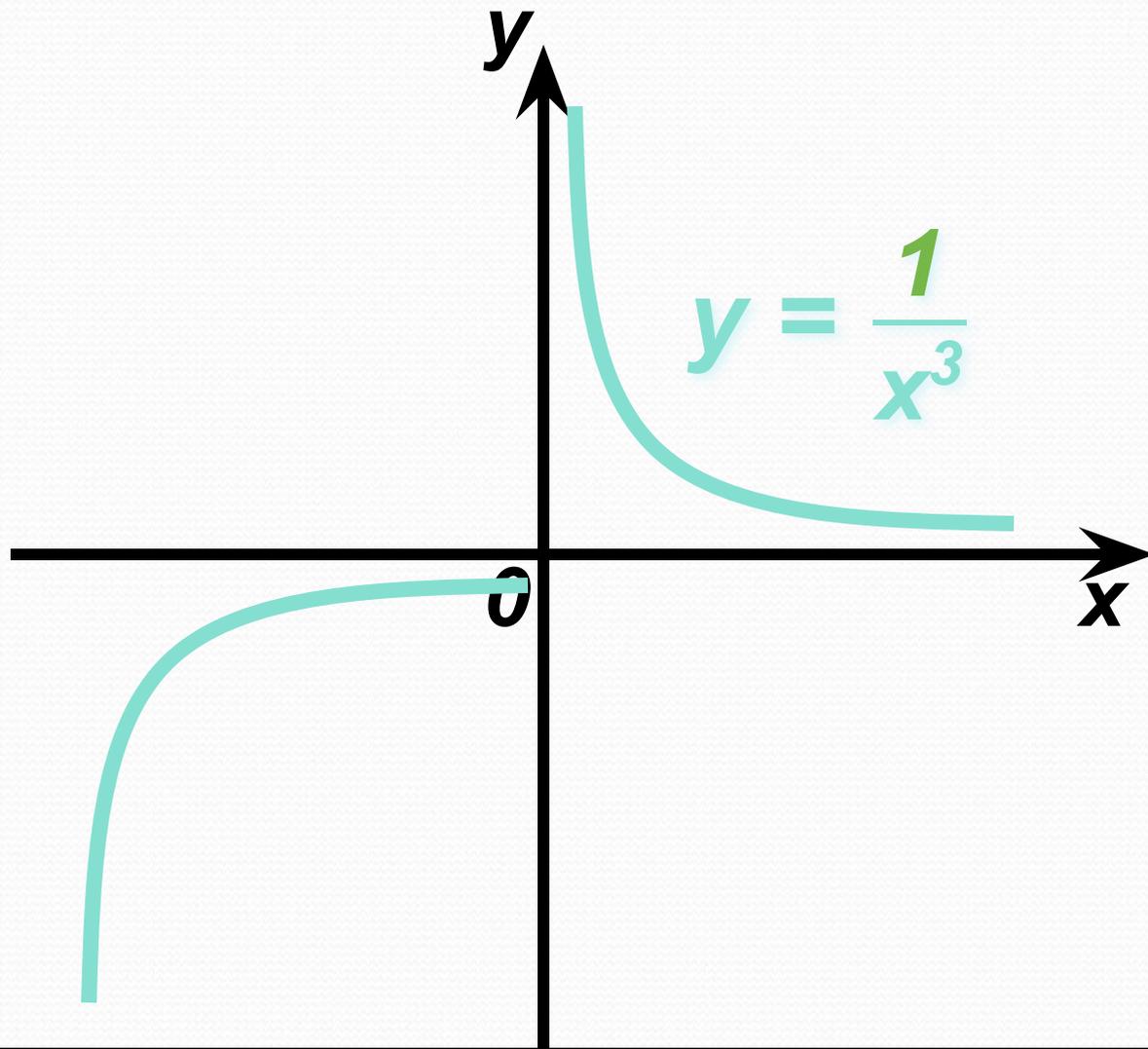
Степенная функция

$$y = x^{-n}, n - \text{четное}$$



Степенная функция

$$y = x^{-n}, n - \text{нечетное}$$



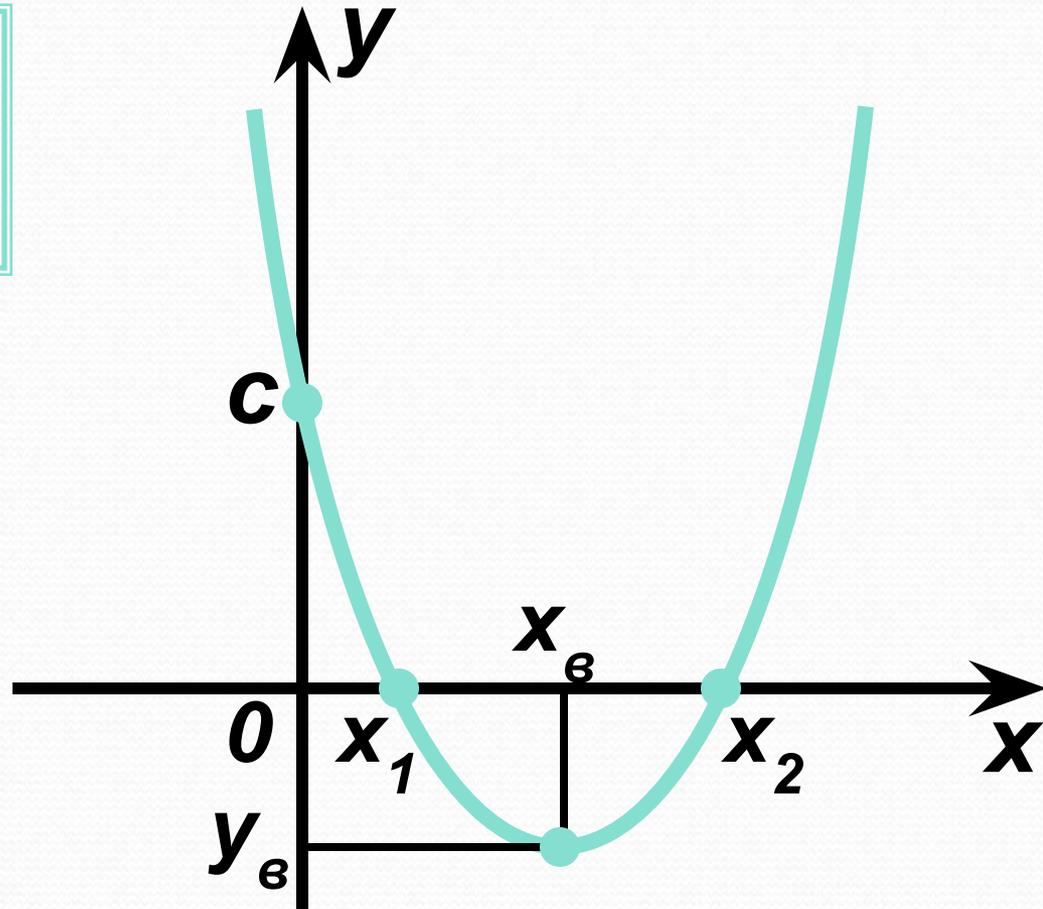
Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_B = -\frac{b}{2a}$$

$$y_B = \frac{4ac - b^2}{4a}$$



Свойства квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

1° $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2° Если $a > 0$, то $E(y) = [y_e; +\infty)$;

Если $a < 0$, то $E(y) = (-\infty; y_e]$.

3° Если $b = 0$, то функция четная.

Если $b \neq 0$, то функция ни четная, ни нечетная.

4° Если $x = 0$, то $y = c$, если $y = 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

5° Если $a > 0$, то функция возрастает при $x \in [x_e; +\infty)$;

функция убывает при $x \in (-\infty; x_e]$.

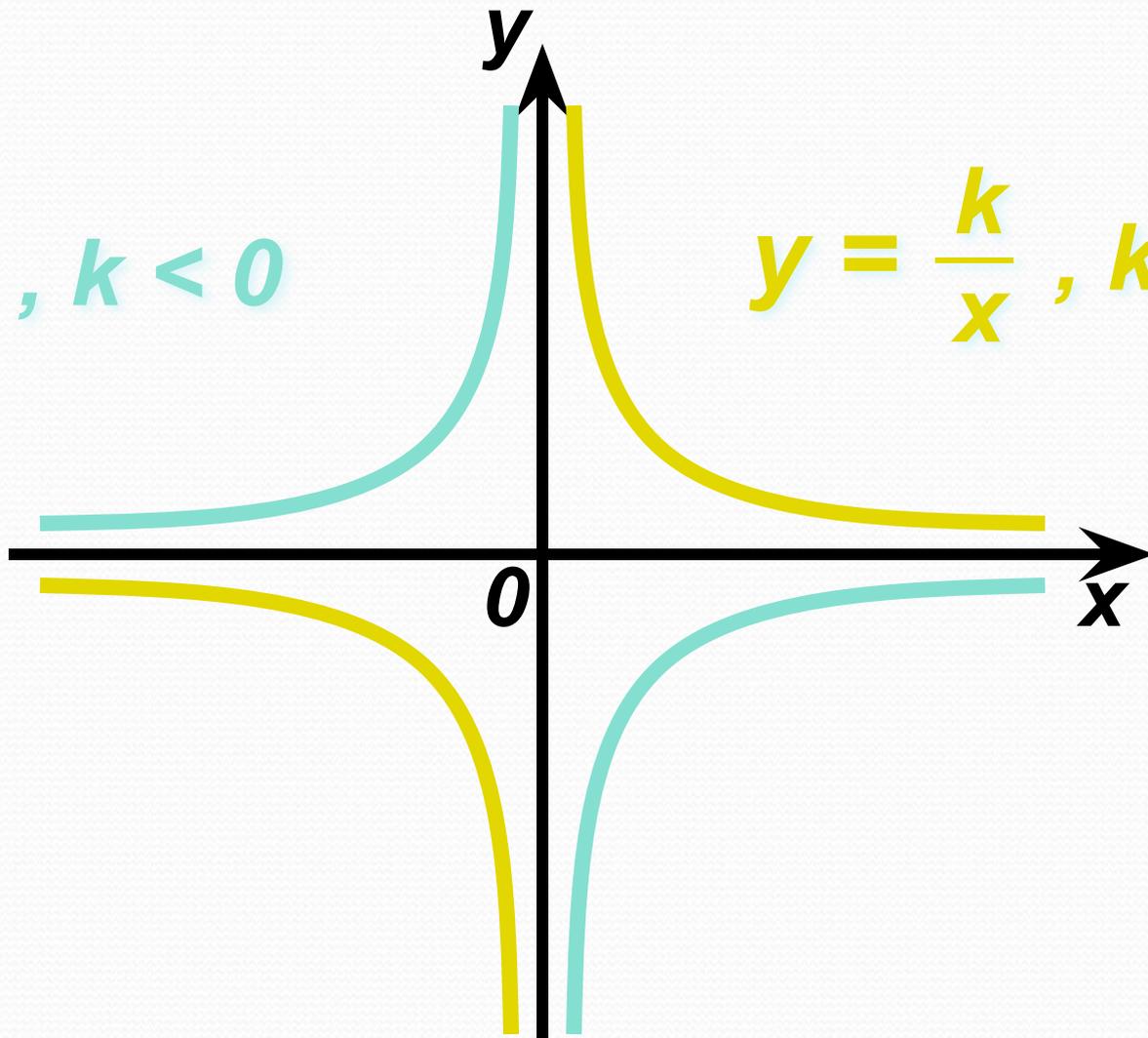
Если $a < 0$, то функция возрастает при $x \in (-\infty; x_e]$;

функция убывает при $x \in [x_e; +\infty)$.

Обратная пропорциональность

$$y = \frac{k}{x}, k < 0$$

$$y = \frac{k}{x}, k > 0$$



Свойства обратной пропорциональности

$$y = \frac{k}{x}$$

1° $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2° $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

3° **Функция нечетная.**

4° $x \neq 0, y \neq 0.$

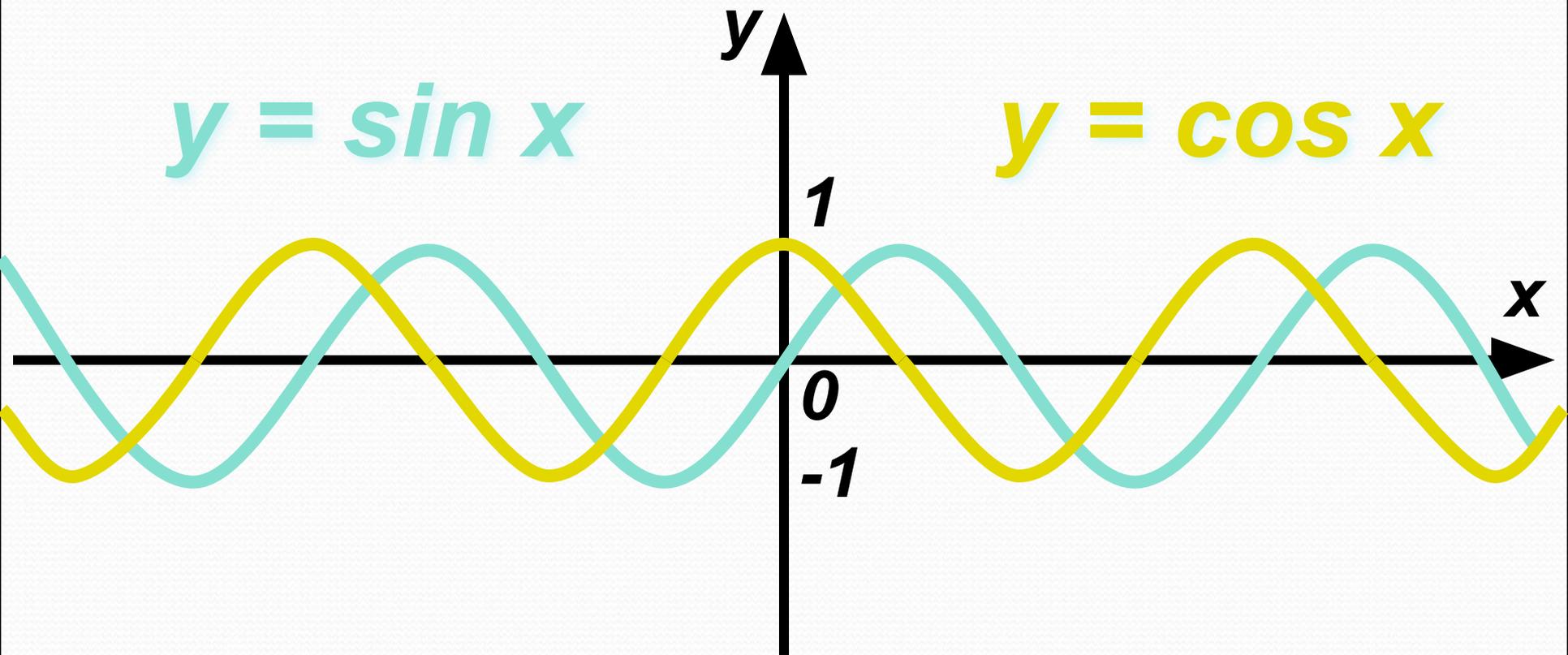
5° **Если $k > 0$, то функция убывает при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$**

Если $k < 0$, то функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$

Тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$

$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$



Свойства функции

$$y = \sin x$$

1° $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2° $E(y) = [-1; 1]$.

3° Функция нечетная.

4° Если $x = 0$, то $y = 0$.

5° Функция возрастает при $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$.

Функция убывает при $x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$.

6° $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Свойства функции

$$y = \cos x$$

1° $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2° $E(y) = [-1; 1]$.

3° Функция четная.

4° Если $x = 0$, то $y = 1$.

5° Функция возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$,

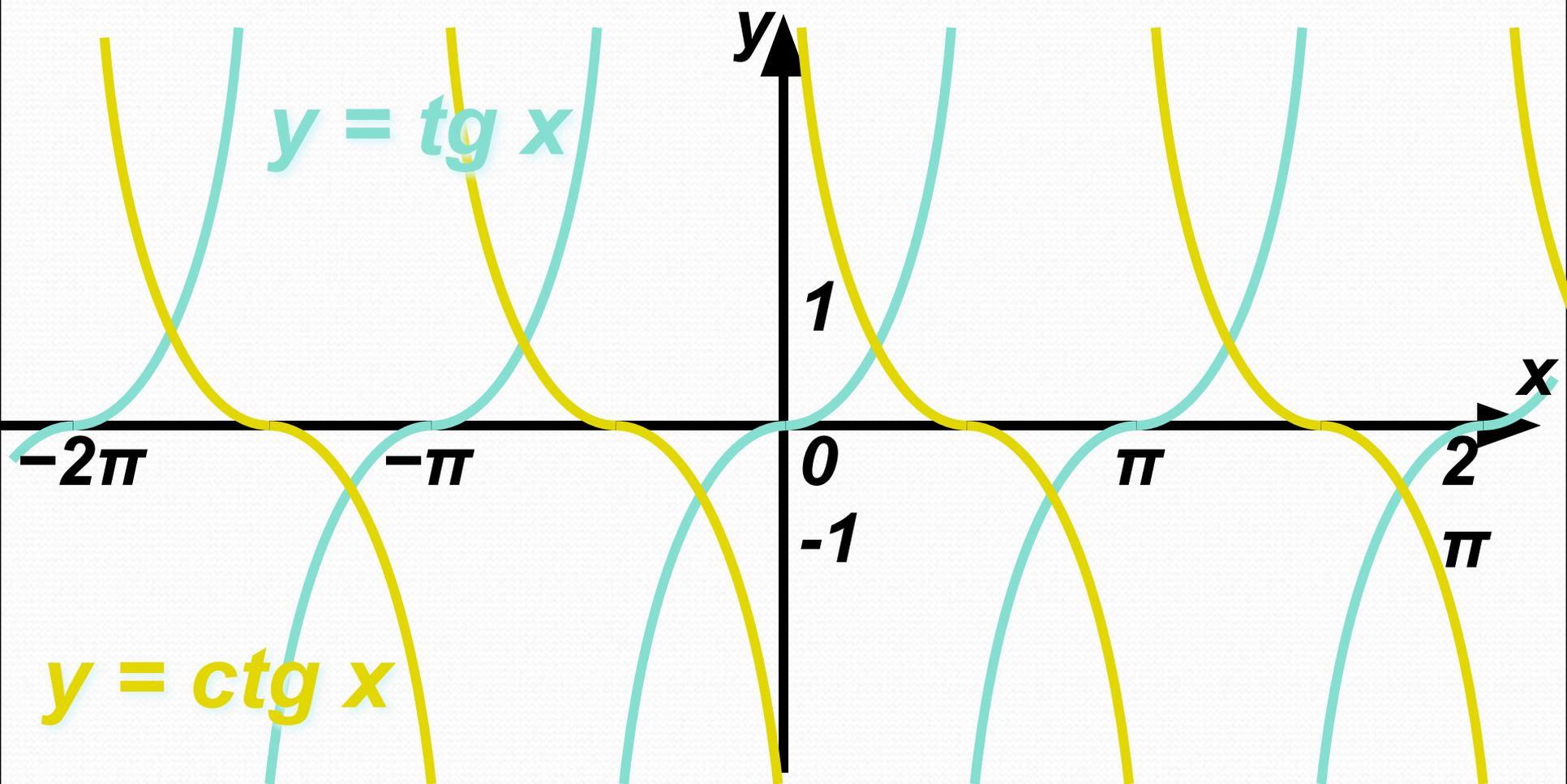
$n \in \mathbb{Z}$.

Функция убывает при $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, где

$n \in \mathbb{Z}$.

6° $x_{\max} = 2\pi n$; $x_{\min} = \pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Тригонометрические функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$



Свойства функции

$$y = \operatorname{tg} x$$

1° $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

2° $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

3° Функция *нечетная*.

4° Если $x = 0$, то $y = 0$.

5° Функция *возрастает* при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$,
где $n \in \mathbb{Z}$.

6° Экстремумов нет.

Свойства функции

$$y = \operatorname{ctg} x$$

1° $D(y) = (\pi n; \pi + \pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$

2° $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

3° Функция **нечетная**.

4° $x \neq 0$; $y = 0$ если $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

5° Функция **убывает** при $x \in (\pi n; \pi + \pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

6° **Экстремумов нет**.

Преобразование графиков

- *Параллельный перенос на вектор $(0;b)$ вдоль оси ординат.*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + b \end{cases}$$

- Для построения графика функции $f(x)+b$, где b – постоянное число, надо перенести график f на вектор $(0;b)$ вдоль оси ординат.

Преобразование вида $y = f(x) + b$

— Это параллельный перенос
графика функции $y = f(x)$ на b
единиц **вдоль оси ординат**

*Если $b > 0$, то
происходит*

смещение

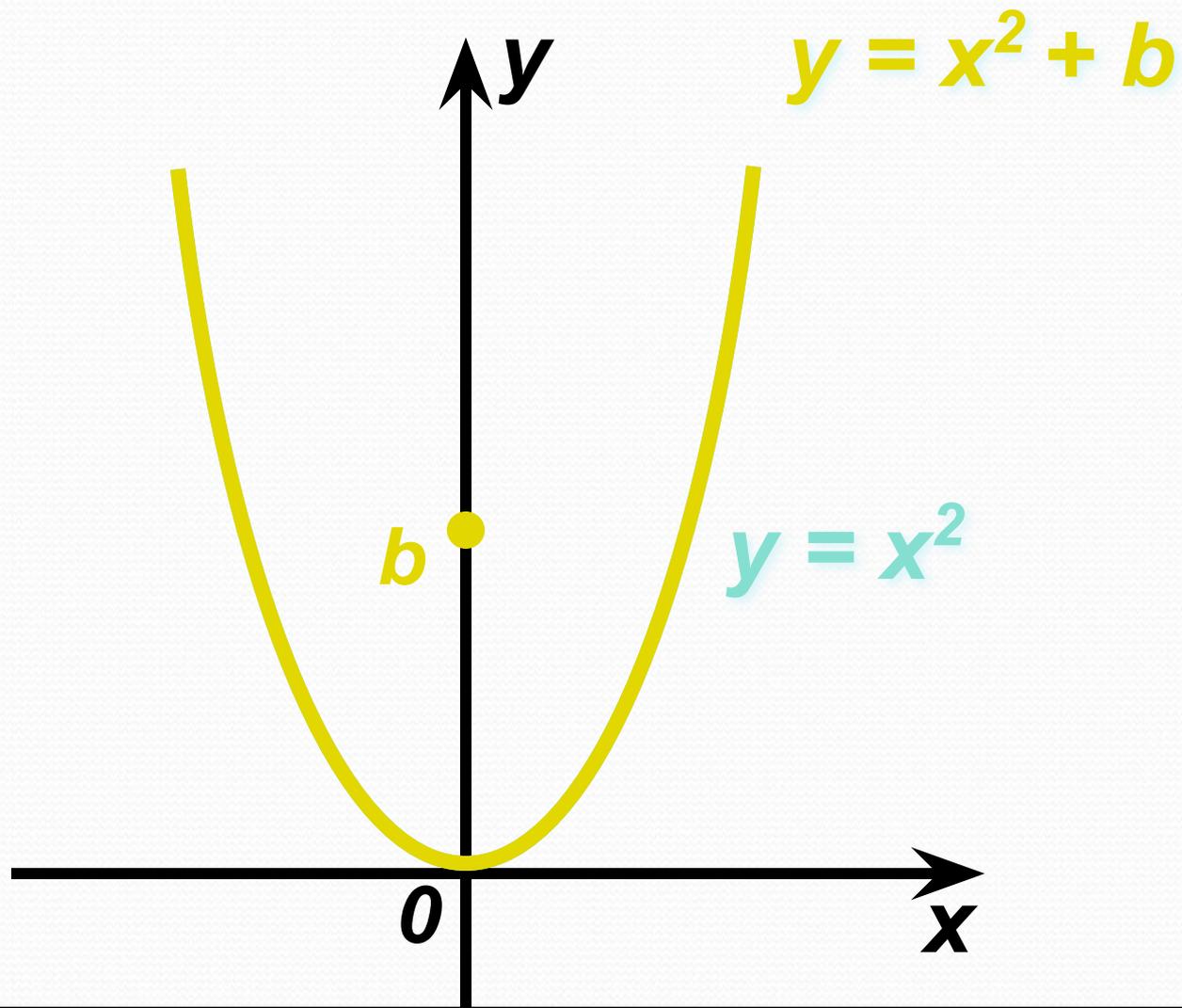


*Если $b < 0$,
то
происходит*

смещение



Преобразование вида $y = f(x) + b$



- *Растяжение вдоль оси Oy с коэффициентом k*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$$

- Для построения графика функции $y=kf(x)$ надо растянуть график функции $y=f(x)$ в k раз вдоль оси ординат.

- **Замечание.** Если $0 < |k| < 1$, то растяжение с коэффициентом k часто называют *сжатием*.

Преобразование вида $y = kf(x)$

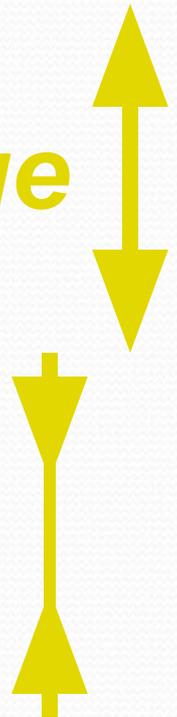
— Это растяжение (сжатие) в k раз
графика функции $y = f(x)$
вдоль оси ординат

Если , $|k| > 1$, то
происходит

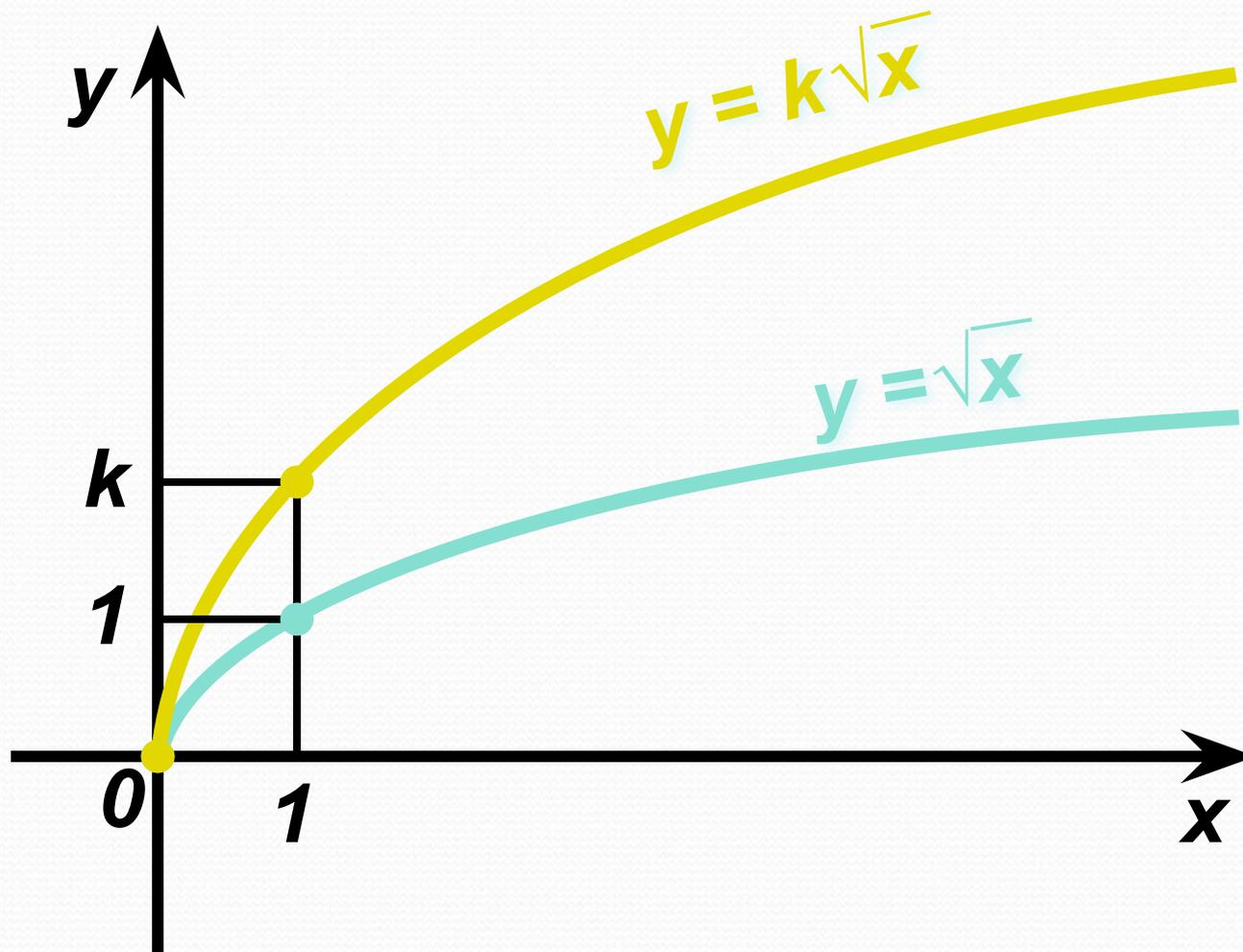
Если , $|k| < 1$,
то
происходит

Растяжение

Сжатие



Преобразование вида $y = kf(x)$



- **Параллельный перенос вдоль оси абсцисс на вектор $(a;0)$**

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y \end{cases}$$

- График функции $y=f(x-a)$ получается из графика f переносом (вдоль оси абсцисс) на вектор $(a;0)$.
- Если $a>0$, то вектор $(a;0)$ направлен в положительном направлении оси абсцисс, а при $a<0$ – в отрицательном.

Преобразование вида $y = f(x - a)$

— Это параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ на a единиц вдоль оси абсцисс

Если $a > 0$,
то
происходит

смещение

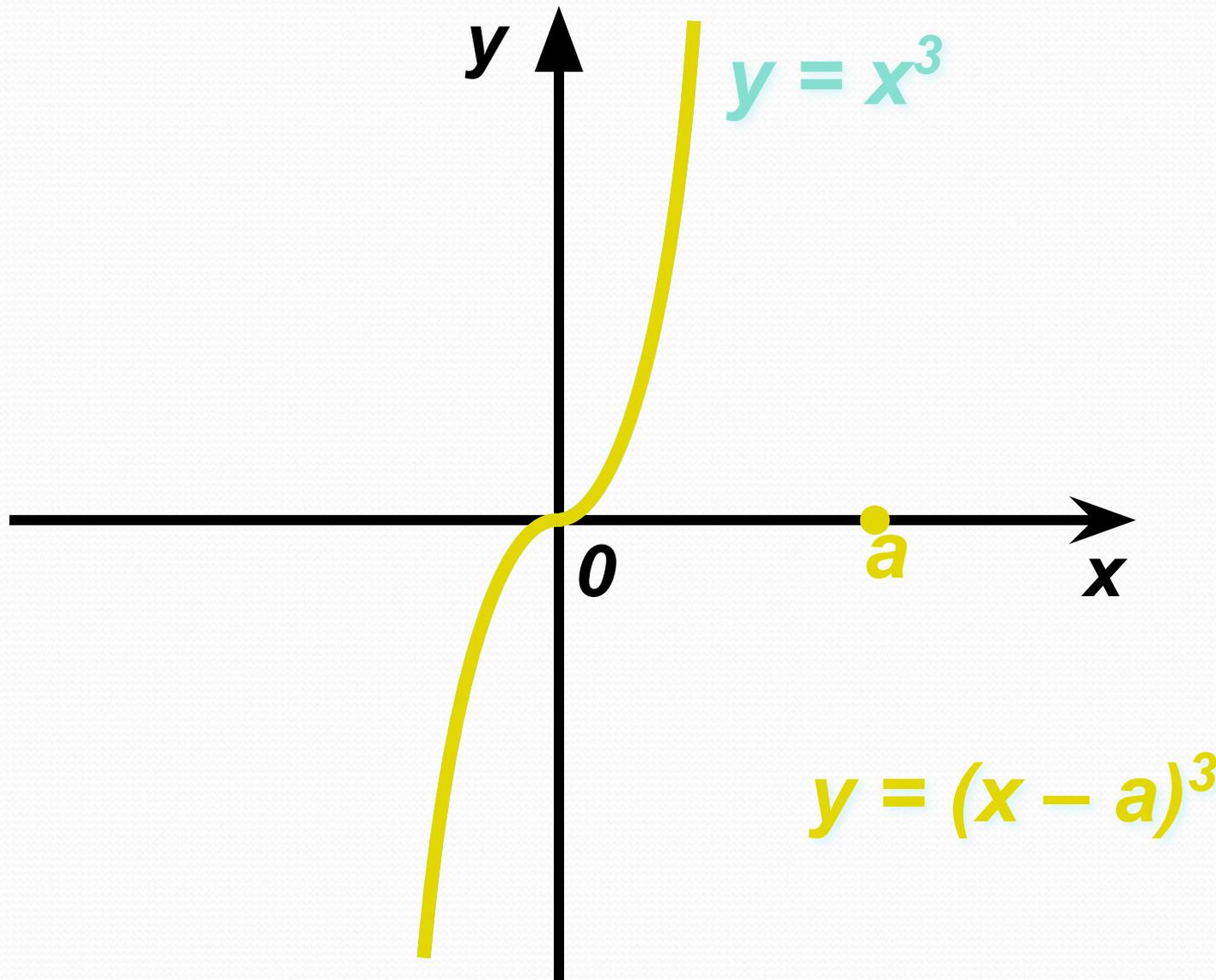


смещение



Если $a < 0$, то
происходит

Преобразование вида $y = f(x - a)$



- **Растяжение вдоль оси Ox с коэффициентом k**

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$$

- Для построения графика функции $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ надо подвергнуть график функции f растяжению с коэффициентом k вдоль оси абсцисс.

Преобразование вида $y = f(tx)$

— Это растяжение (сжатие) в t раз
графика функции $y = f(x)$
вдоль оси абсцисс

Если , $|t| > 1$, то
происходит

Сжатие



Если , $|t| < 1$, то
происходит

Растяжение



Преобразование вида $y = f(mx)$

