

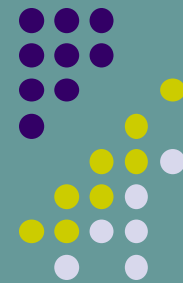
Первообразная Интеграл

Содержание



- Понятие первообразной
- Неопределенный интеграл
- Таблица первообразных
- Определенный интеграл
- Вычисление определенного интеграла
- Площадь криволинейной трапеции
- Площадь криволинейной трапеции **Площадь криволинейной трапеции (1)**
- Площадь криволинейной трапеции **Площадь криволинейной трапеции (2)**
- Площадь криволинейной трапеции **Площадь криволинейной трапеции (3)**
- Площадь криволинейной трапеции **Площадь криволинейной трапеции (Площадь**

Понятие первообразной



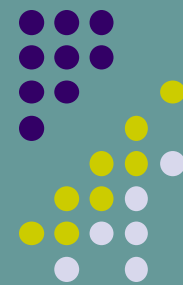
Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ если выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Операция, обратная дифференцированию



Операция нахождения **первообразной** функции называется **интегрированием**.



Интегрирование – математическое действие, обратное дифференцированию, то есть нахождению производной.

Интегрирование позволяет по производной функции найти саму функцию.



Примеры



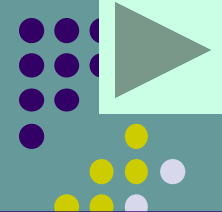
1. $f(x) = 2x; \quad F(x) = x^2$
 $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $f(x) = -\sin x;$
 $F(x) = \cos x$
 $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$

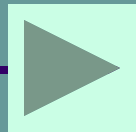
3. $f(x) = 6x^2 + 4;$
 $F(x) = 2x^3 + 4x$
 $F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 6x^2 + 4 = f(x)$



Таблица первообразных



	$f(x)$	$F(x)$	
	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	
	$\sqrt{x}$	$\frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$	
	$\cos x$	$\sin x + C$	
	$\sin x$	$-\cos x + C$	
	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	
	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	





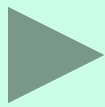
Неопределенный интеграл



Множество всех первообразных называют **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначают

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Где C – произвольная постоянная (**const**).



Примеры

$$\int A dx = Ax + C; \quad (Ax + C)' = A$$



$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(-\cos x + C)' = \sin x$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C;$$

$$\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$(\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$





Определенный интеграл



$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула **Ньютона-Лейбница**.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,
и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.



Вычисление определенного интеграла

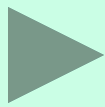
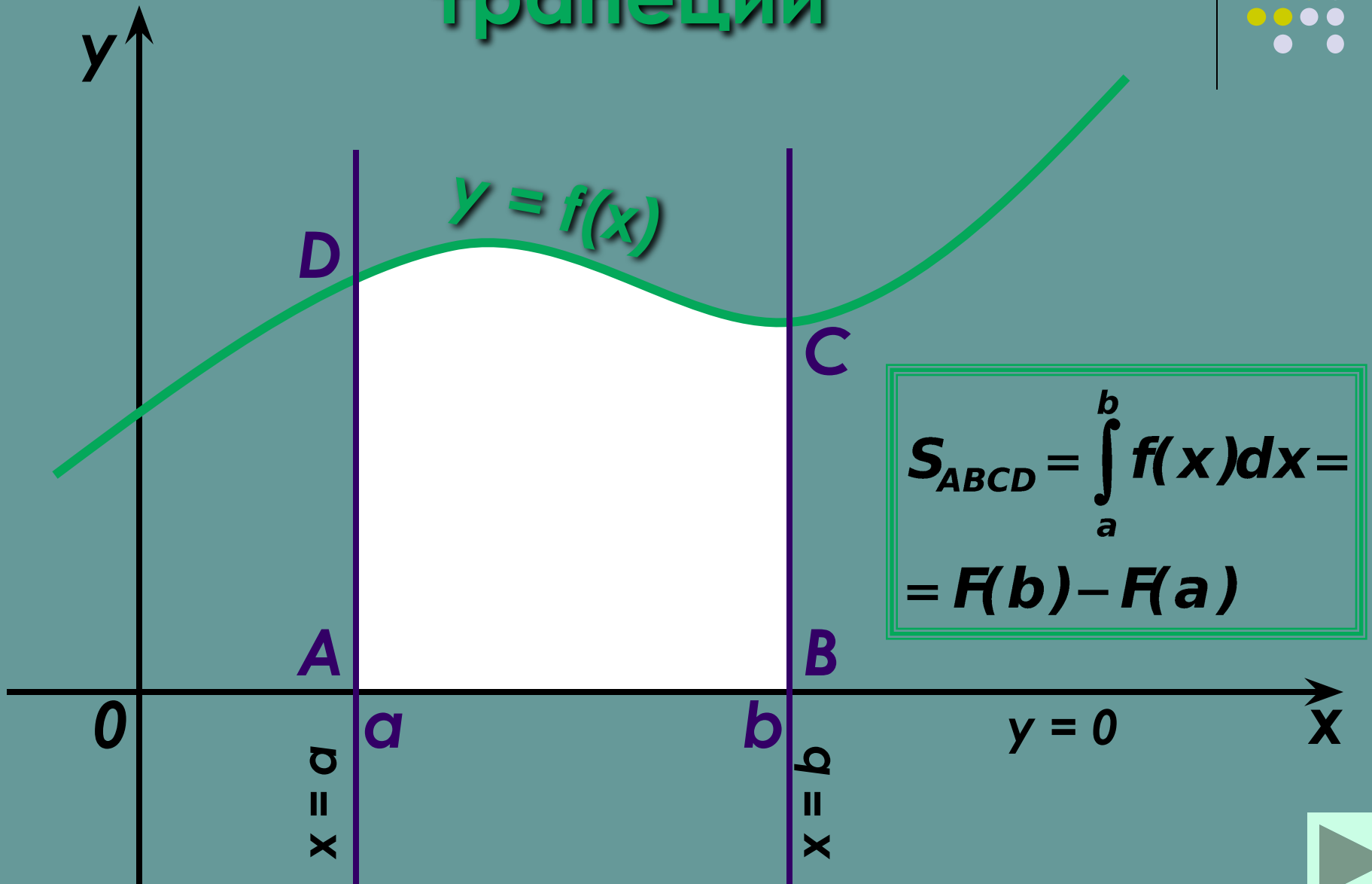


$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x) \Big|_1^2 =$$

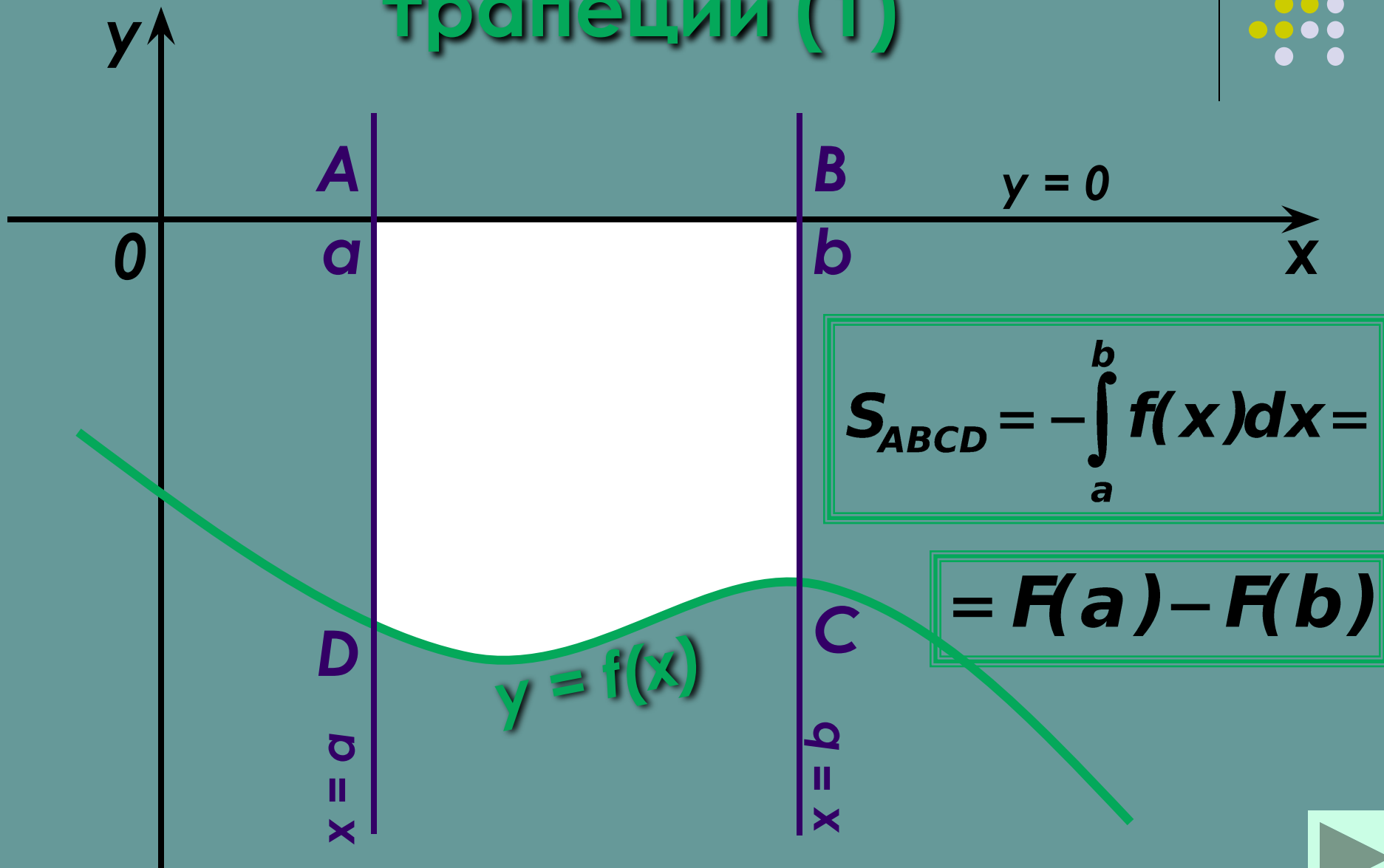
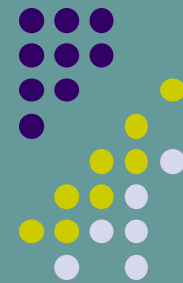
$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5$$



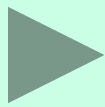
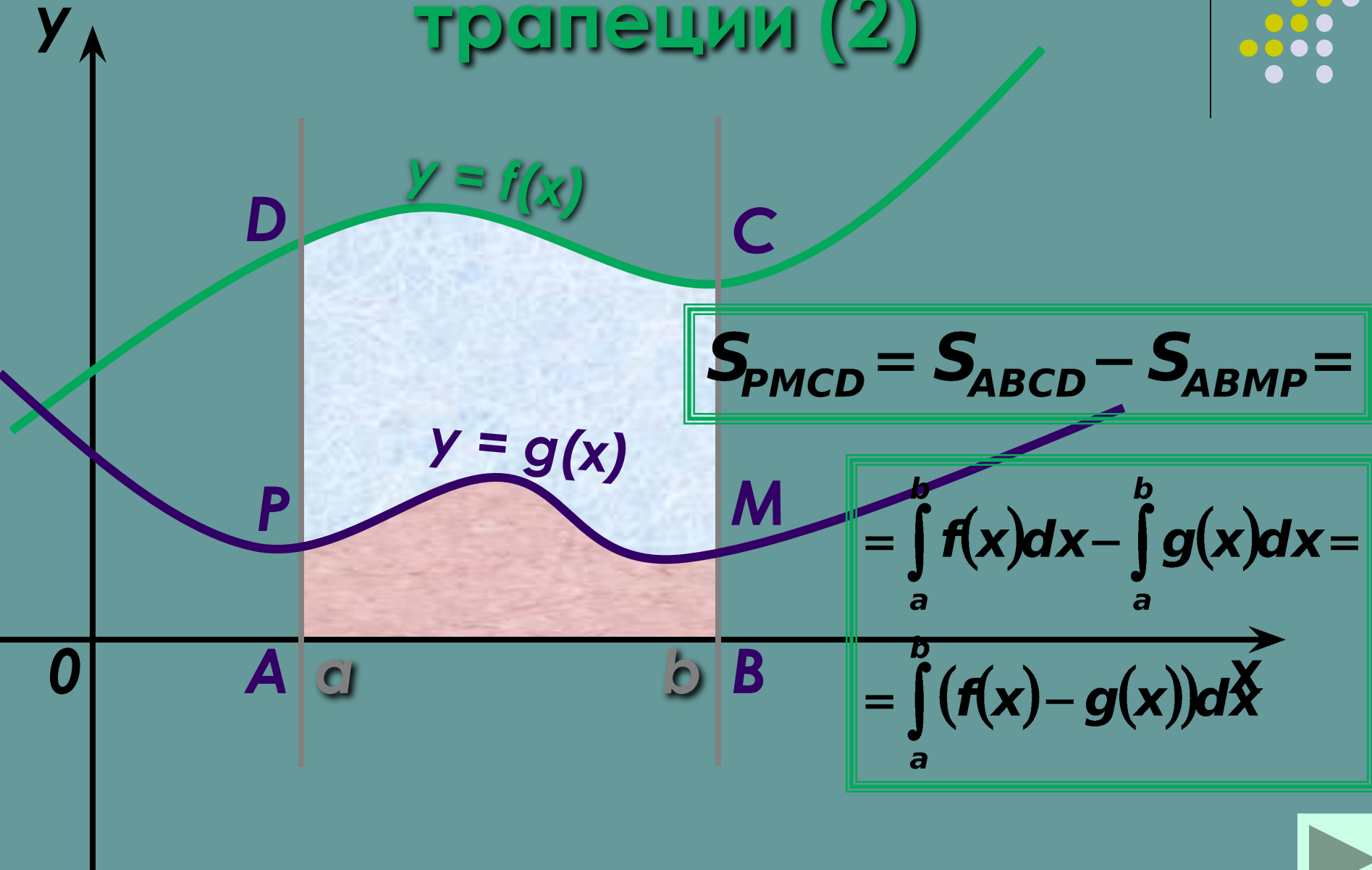
Площадь криволинейной трапеции



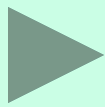
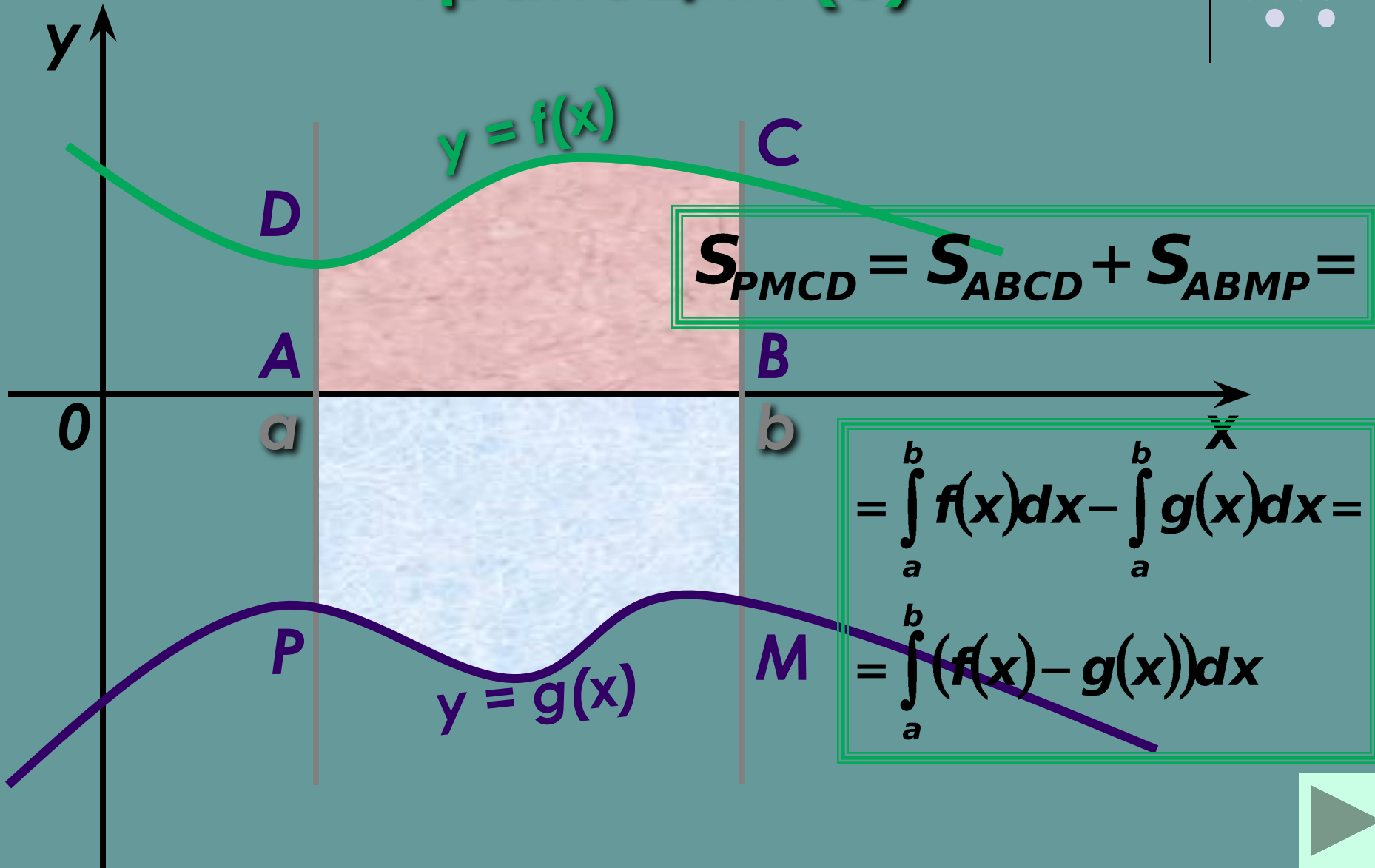
Площадь криволинейной трапеции (1)



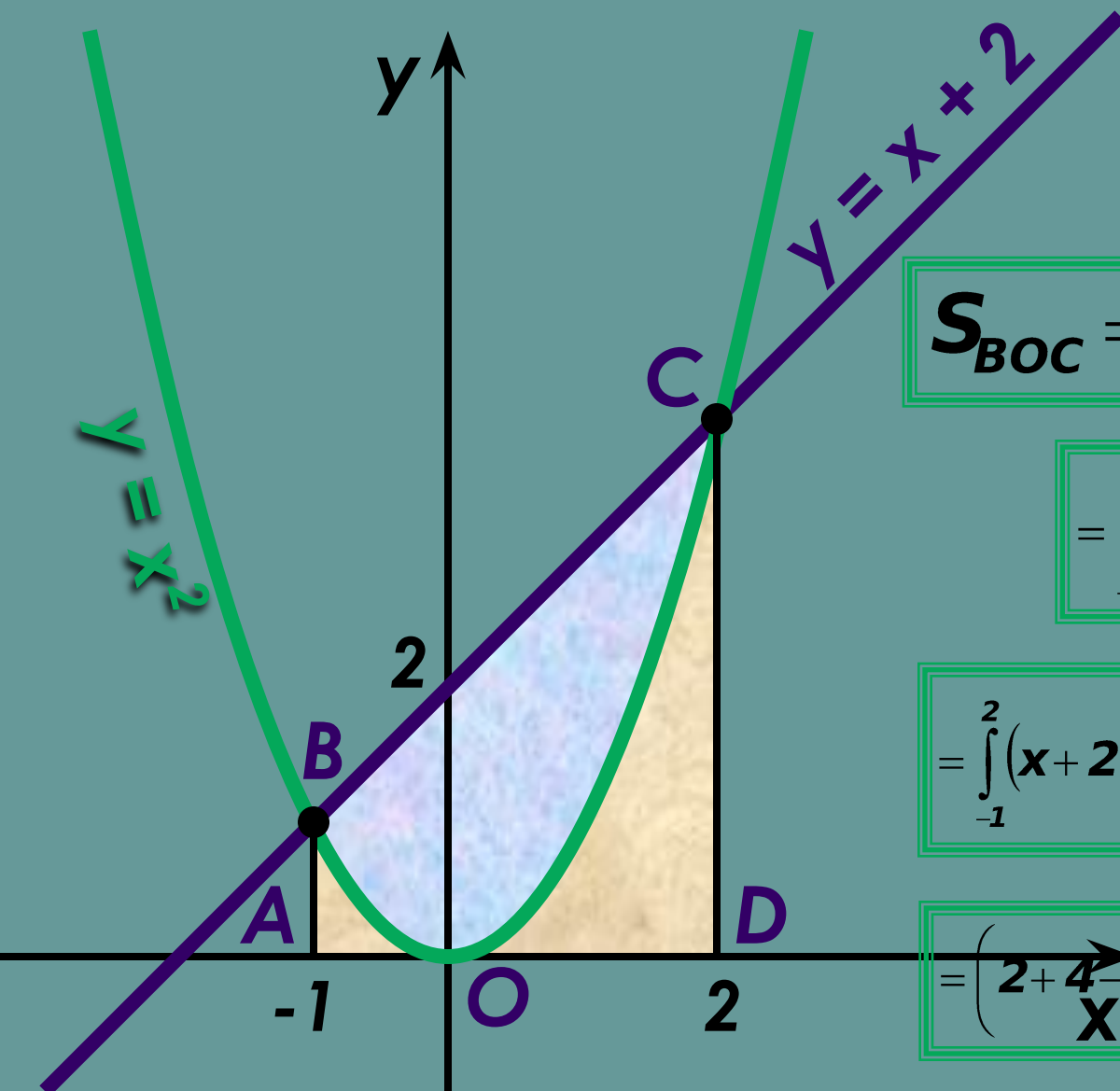
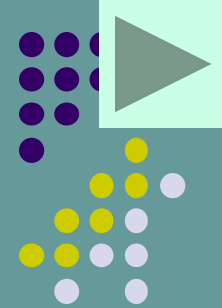
Площадь криволинейной трапеции (2)



Площадь криволинейной трапеции (3)



Пример 1: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



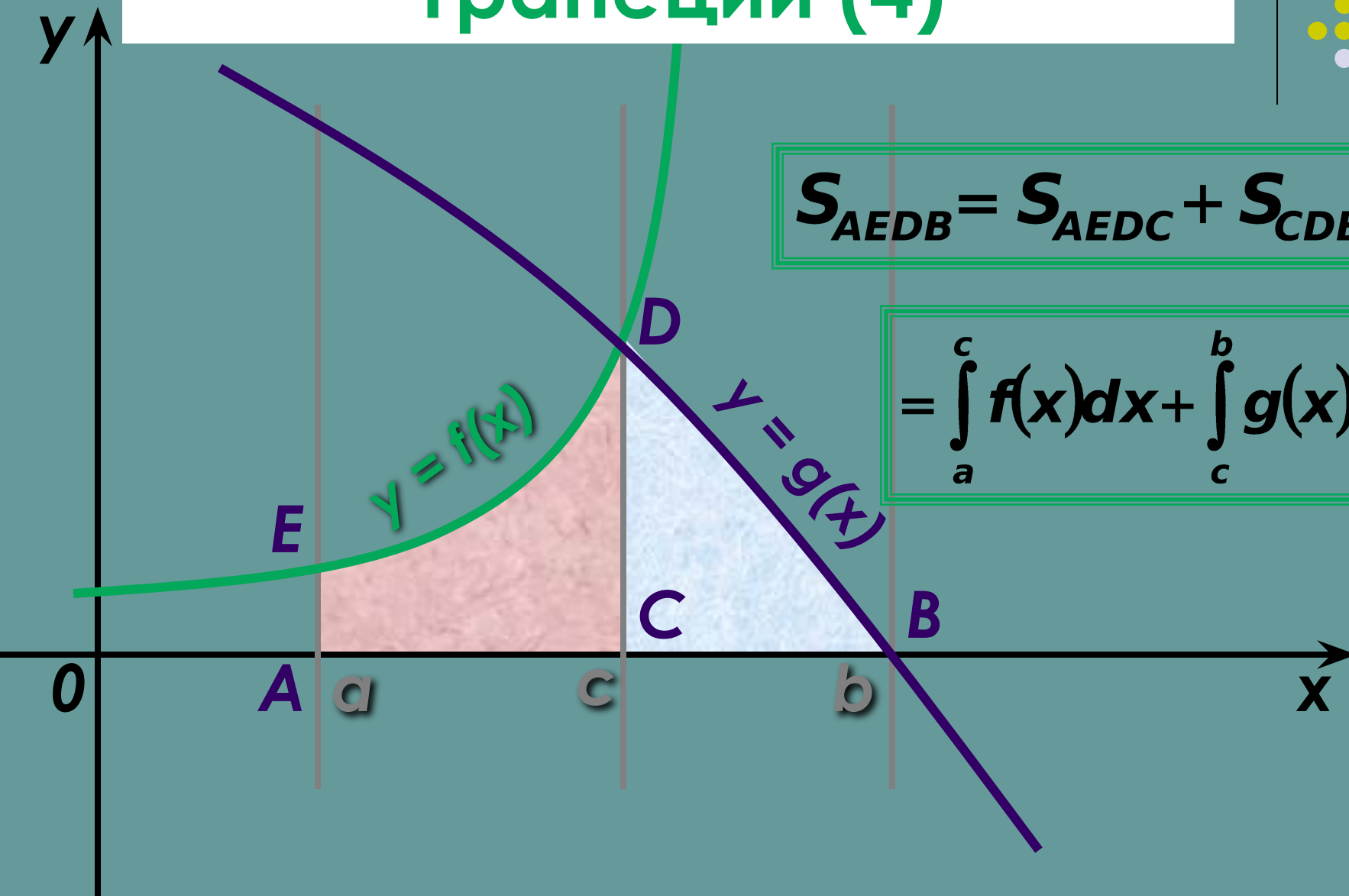
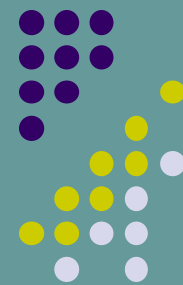
$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

$$= \int_{-1}^2 (x + 2) dx - \int_{-1}^2 (x^2) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 =$$

$$= \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 5 - \frac{1}{2} = 4,5$$

Площадь криволинейной трапеции (4)



$$S_{AEDB} = S_{AEDC} + S_{CDB} =$$

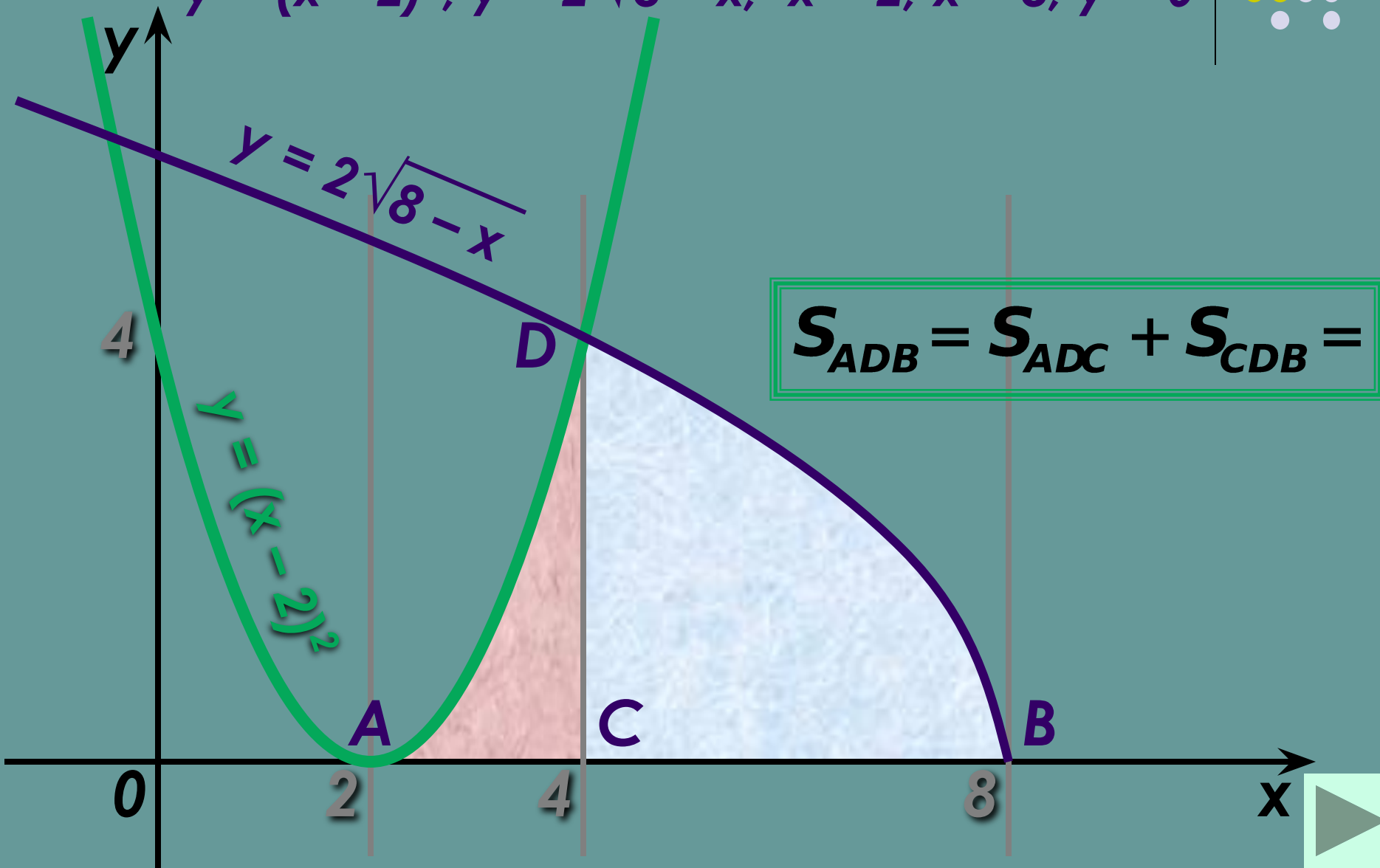
$$= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$



Пример 2:

вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$



Пример 2:

вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$



$$= \int_2^4 (x-2)^2 dx + \int_4^8 2\sqrt{8-x} dx = \left. \frac{(x-2)^3}{3} \right|_2^4 - \left. \frac{4(8-x)\sqrt{8-x}}{3} \right|_4^8 =$$

$$= \left(\frac{(4-2)^3}{3} - \frac{(2-2)^3}{3} \right) - \left(\frac{4(8-8)\sqrt{8-8}}{3} - \frac{4(8-4)\sqrt{8-4}}{3} \right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

