

Математика 11 класс
Модуль «Алгебра и начала
математического анализа»

Теоремы, необходимые для решения более сложных логарифмических неравенств ЕГЭ

Климова О.Н., учитель математики высшей
квалификационной категории
МБОУ СОШ №108 г. Новосибирска

Теорема 1.

- Для чисел a , b и c таких, что $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ и $c > 0$, верны следующие утверждения:

- Неравенство $\log_a b > \log_a c$ и
- $(a-1)(b-c) > 0$ равносильны
- Неравенство $\log_a b < \log_a c$ и
- $(a-1)(b-c) < 0$ равносильны

Пример (разбор в классе)

- Решить неравенство

$$\log_{2x}(2x^2 - 4x + 6) < \log_{2x}(x^2 + x)$$

$$\begin{cases} (2x - 1)(2x^2 - 4x + 6 - x^2 - x) \leq 0 \\ 2x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 4x + 6 > 0 \\ x^2 + x > 0 \end{cases}$$

равно
сильна

$$\begin{cases} (2x - 1)(x^2 - 5x + 6) \leq 0 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x(x + 1) > 0 \end{cases}$$

равно
сильна

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)(x - 3) \leq 0 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

равно
сильна

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1/2) \cup [2; 3]$.

Теорема 2.

При всех допустимых значениях a , b , c и d верны следующие утверждения:

- неравенства $\log_a b \log_c d > 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) > 0$ равносильны;
- Неравенства $\log_a b \log_c d < 0$ и
- $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) < 0$ равносильны

ПРИМЕР

(разбор в классе)

- Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{x}} \frac{x}{x+1} \log_{x-2} (x^2 + 1) \leq 0$$

$$\log_{\frac{1}{x}} \frac{x}{x+1} \log_{x-2} (x^2 + 1) \leq 0 \quad \text{РЕШЕНИЕ}$$

$$\begin{cases} (\frac{1}{x} - 1)(\frac{x}{x+1} - 1)(x - 2 - 1)(x^2 + 1 - 1) \leq 0 \\ \frac{1}{x} > 0 \\ x \neq 1 \\ \frac{x}{x+1} > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x - 2 \neq 1 \end{cases}$$

равносильн
а

$$\begin{cases} \frac{1-x}{x} \times \frac{-1}{x+1} \times (x-3)x^2 \leq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x+1 > 0 \\ x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

равносильн
а

$$\begin{cases} \frac{x(x-1)(x-3)}{(x+1)} \leq 0 \\ x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

равносильн
а

$$2 < x < 3$$

ОТВЕТ: (2;3)

Теорема 3.

- При всех допустимых значениях a, b, c верны следующие утверждения:

- неравенство $\log_a b - \log_c b > 0$ и

неравенство $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) > 0$

равносильны;

- Неравенство

- и неравенство $\log_a b - \log_c b < 0$
 $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) < 0$

равносильны.

ПРИМЕР

- Решите неравенство (самостоятельно)

$$\log_x(x-1) - \log_{x+1}(x-1) < 0$$