

Применение производной к исследованию функций

***Производная и экстремумы.
Исследование функций на
монотонность.***



Урок в 10-а классе.
Учитель –Нефтулаева Т.Б.

Кое-что о свойствах функций.



ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ РАЗМИНКА

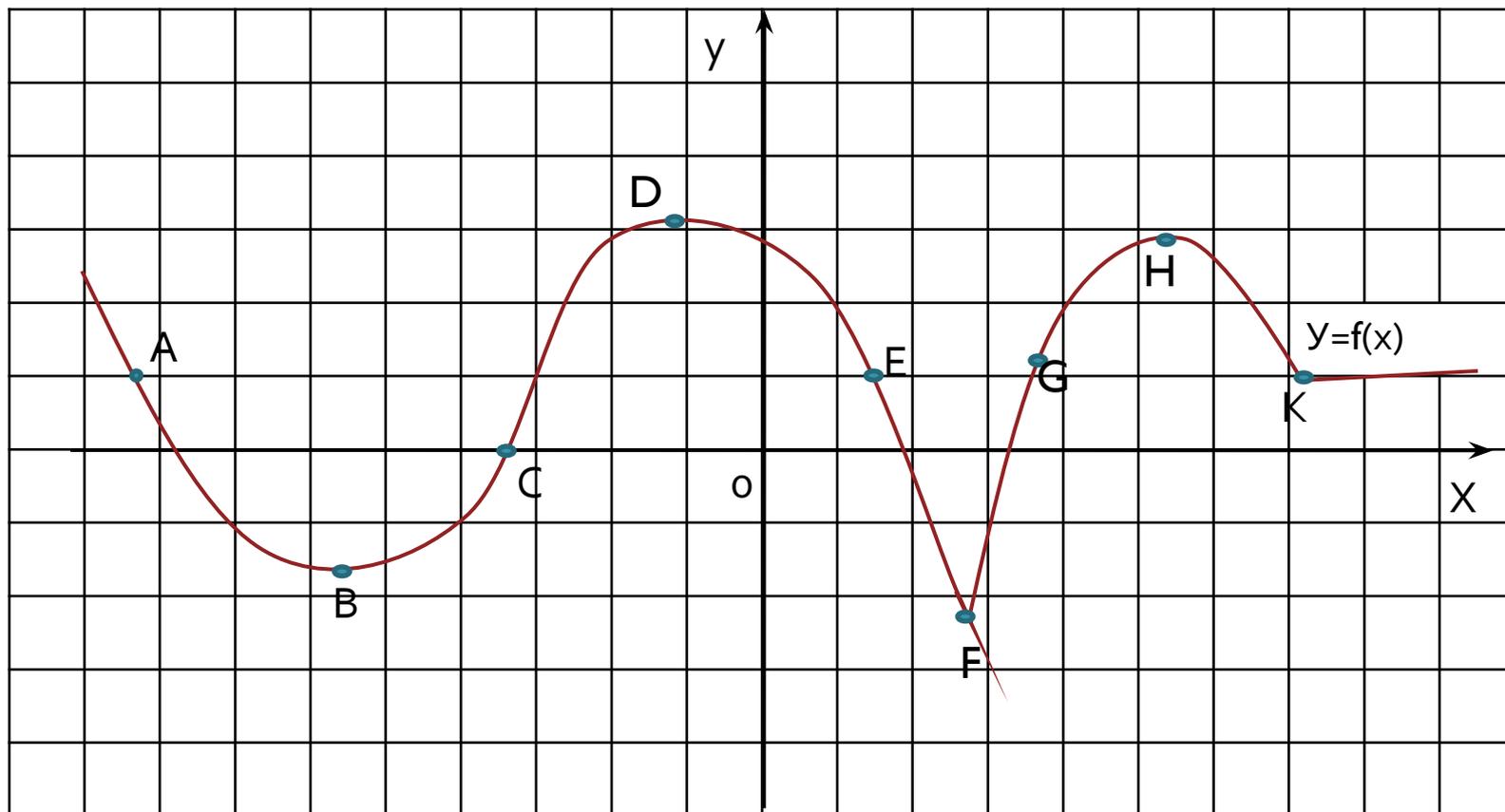
1. Закончите формулировки утверждений:

- А) функцию $y=f(x)$ называют возрастающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X , таких, что $x_1 < x_2$,
- Б) если в некоторой точке графика функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция
- В) если к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$ можно провести касательную, непараллельную оси y , то $f'(a)$ выражает
- Г) если касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ образует с положительным направлением оси X острый угол, то производная в этой точке.....

2. Выберите верное утверждение:

- А) Точку x_0 называют точкой **максимума** функции $y=f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.
- Б) Точку x_0 называют точкой **максимума** функции $y=f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.
- В) Точку x_0 называют точкой **максимума** функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой, таких, что $x \neq x_0$, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

3. Определите знаки производной функции $y=f(x)$ в отмеченных точках.

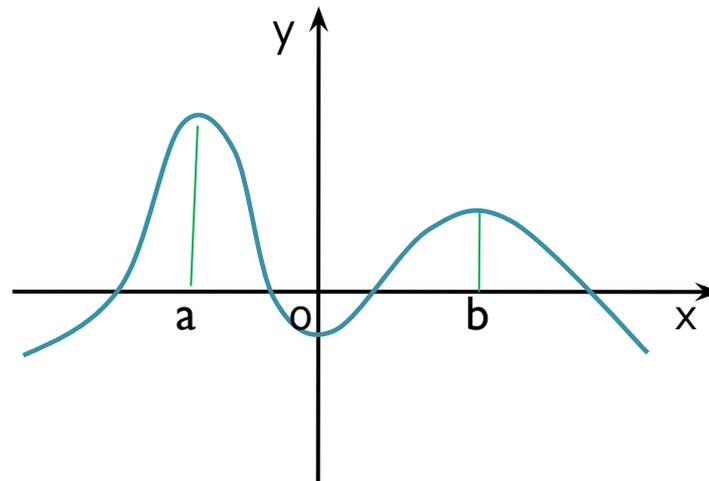


1. Ответы:

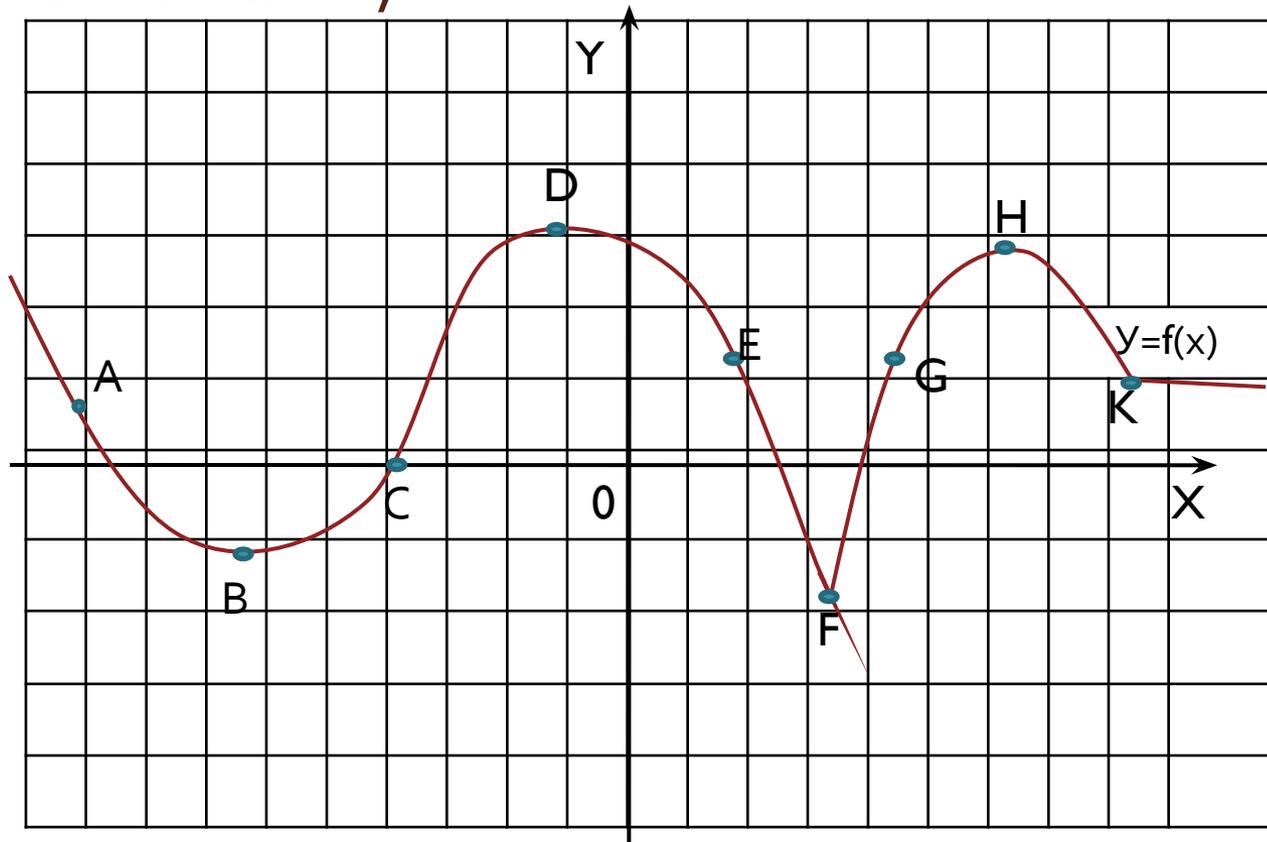
- А) функцию $y=f(x)$ называют возрастающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X , таких, что $x_1 < x_2$, **выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.**
- Б) если в некоторой точке графика функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция **дифференцируема.**
- В) если к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$ можно провести касательную, непараллельную оси y , то $f'(a)$ выражает **угловой коэффициент касательной.**
- Г) если касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ образует с положительным направлением оси X острый угол, то производная в этой точке **положительна.**

2. Верное утверждение:

- В) Точку x_0 называют точкой **максимума** функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой, таких, что $x \neq x_0$, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.



3. **Ответы** : производная равна нулю в точках B , D , H ; положительна в точках C , G ; отрицательна в точках A , E и не существует в точках F , K .



Определенно, существует тесная связь между свойствами функции и ее производной. Но какая – предстоит найти. Итак, ...

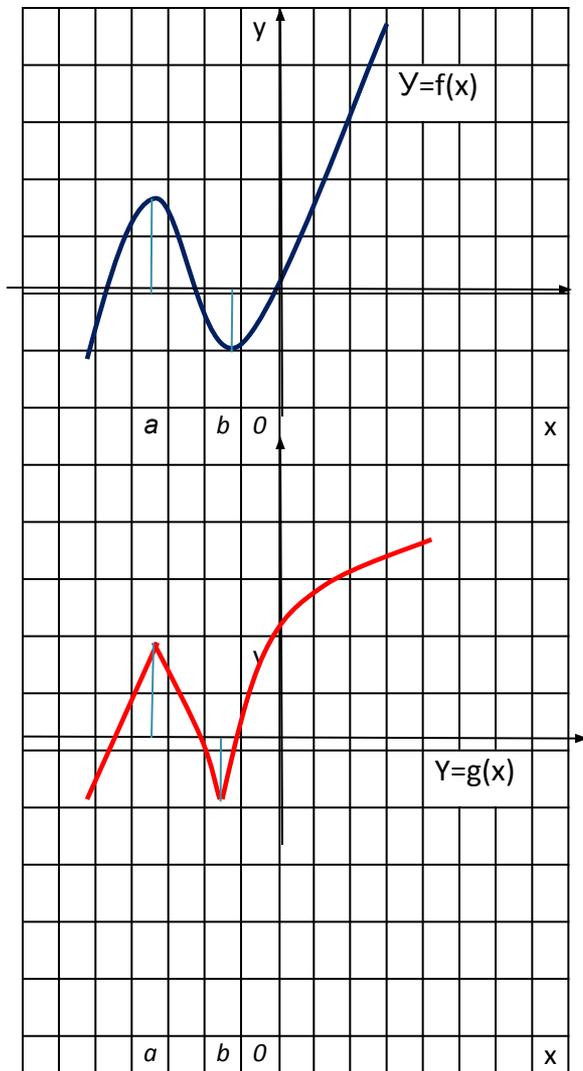


ПРИМЕНЕНИЕ

ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ

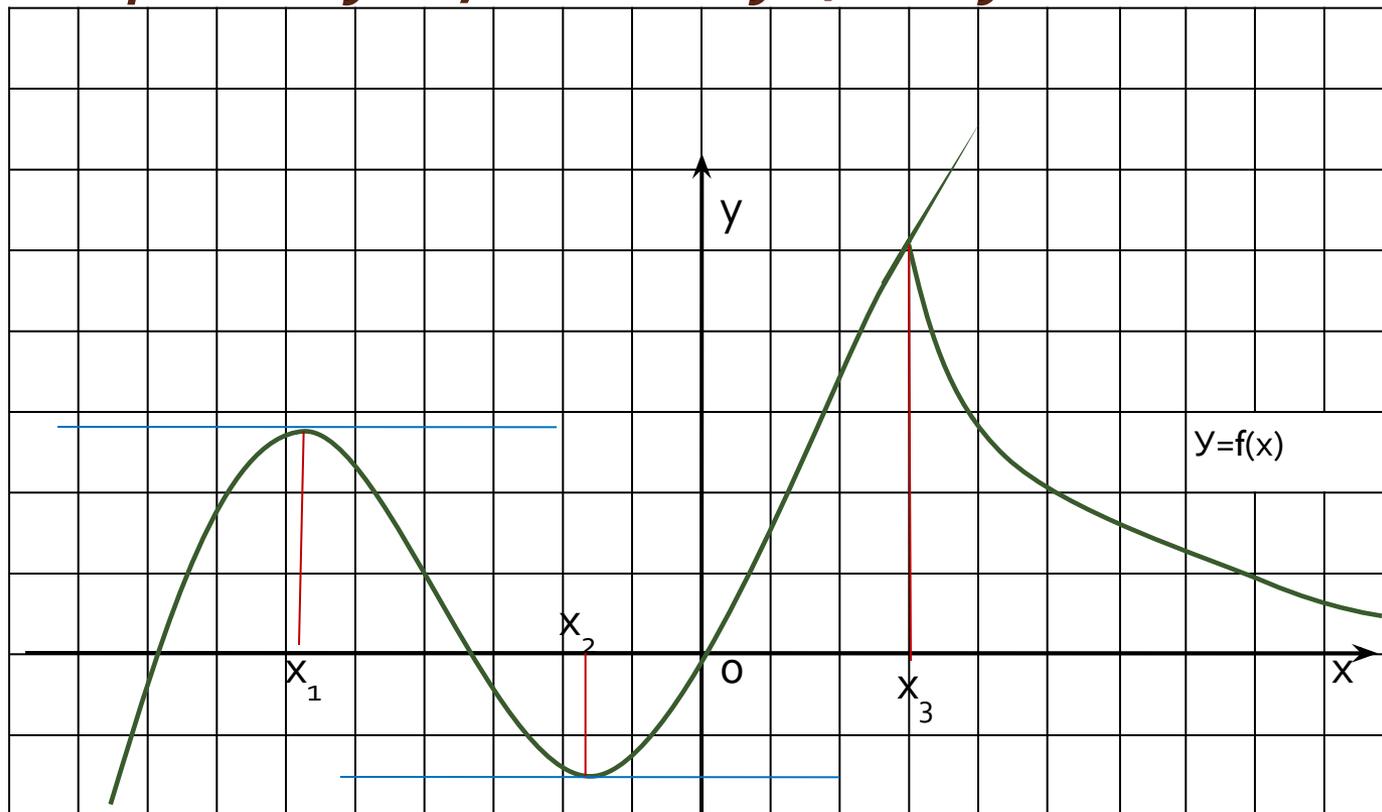
ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ.

Задание 1.



- Опишите характер **монотонности** функций в окрестностях точек $x = a$ и $x = b$.
- Являются ли точки с абсциссами a и b **экстремумами** данных функций?
- Как ведут себя **касательные** к графикам этих функций в указанных точках?
- Найдите, если возможно, значения **производных** этих функций в данных точках.
- Сделайте вывод о **необходимом условии существования экстремума функции в точке**.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.



Особые точки :

x_1, x_2 – стационарные точки,
 x_3 – критическая точка.

x_1, x_3 – точки максимума,
 x_2 – точка минимума.

Новые термины:

- **Стационарная точка** – внутренняя точка области определения функции, в которых производная равна нулю.

- **Критическая точка** – внутренняя точка области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует.

Задание 2.

- Найдите точки, в которых функция $y = x^3 - 3x + 1$ **может** иметь экстремумы.

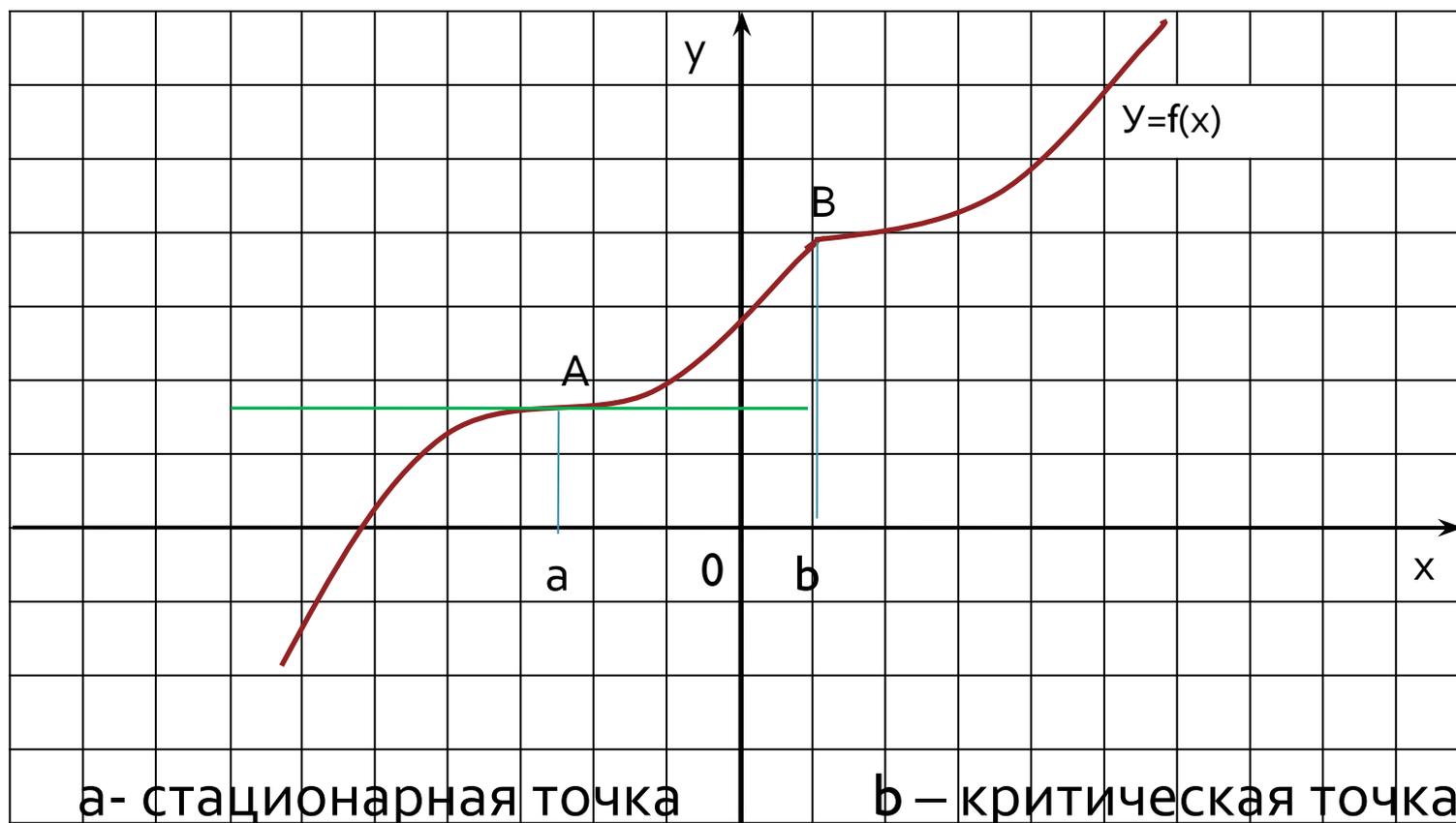
- Решение:

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

$f'(x)$ существует при всех значениях аргумента.

$f'(x) = 0$ при $x = 1$ и $x = -1$. Эти точки **могут** быть точками экстремума.

Сравните данный чертеж с предыдущим и подумайте: является ли указанное условие **достаточным** для существования экстремума в данной точке?

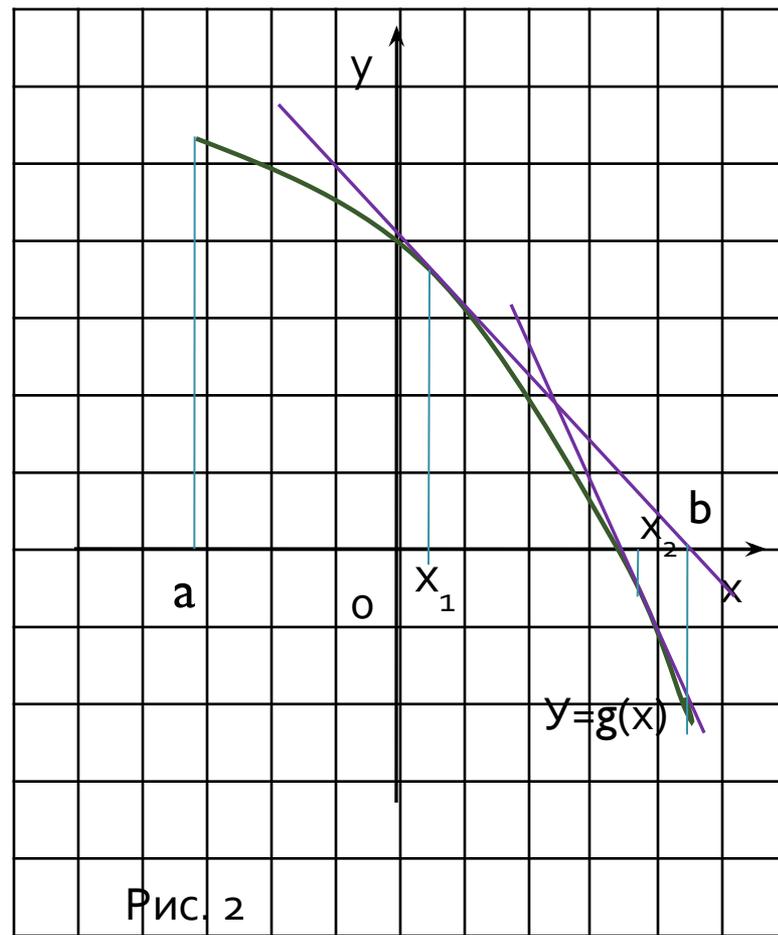
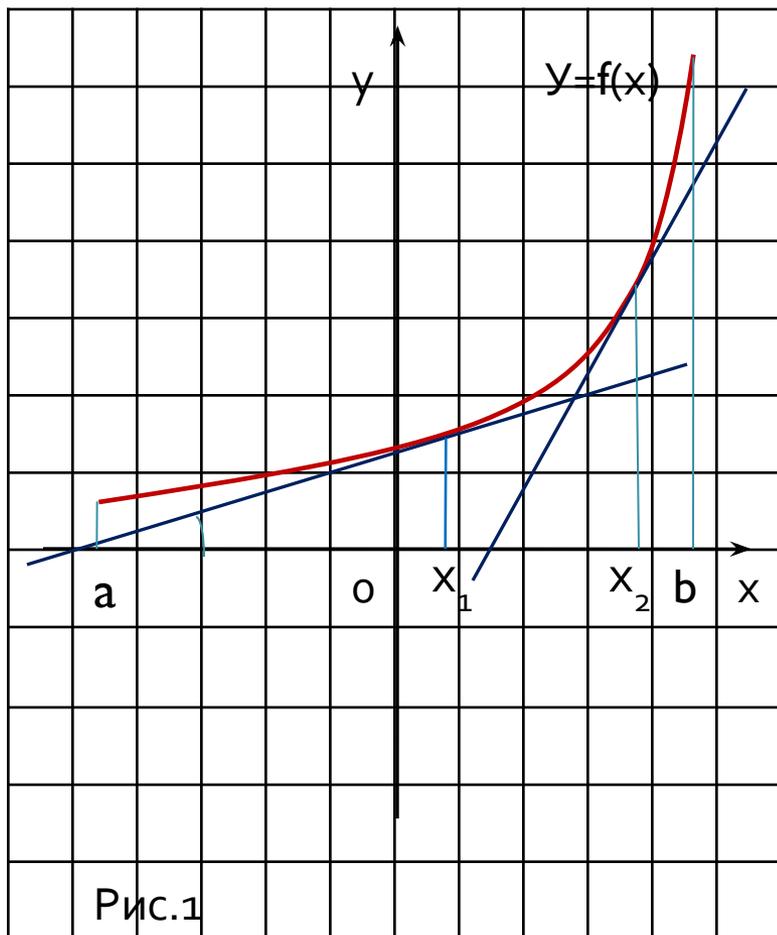




Вывод: *при переходе через точку экстремума характер монотонности функции **меняется***

- **Вопрос: как связаны монотонность функции и производная?**

Рассмотрите рисунки и постарайтесь установить зависимость между знаком производной и характером монотонности функции на промежутке $[a;b]$.
Сформулируйте выводы.



Сравните свои выводы со следующим утверждением:

- **Теорема.** Если функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке X и ее производная **положительна** (соответственно **отрицательна**) во внутренних точках этого промежутка, то функция $y=f(x)$ **возрастает** (соответственно **убывает**) на X .

Сравните формулировки теорем:

Теорема.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке X и ее производная **положительна** (соответственно **отрицательна**) во внутренних точках этого промежутка, то функция $y=f(x)$ **возрастает** (соответственно **убывает**) на X .

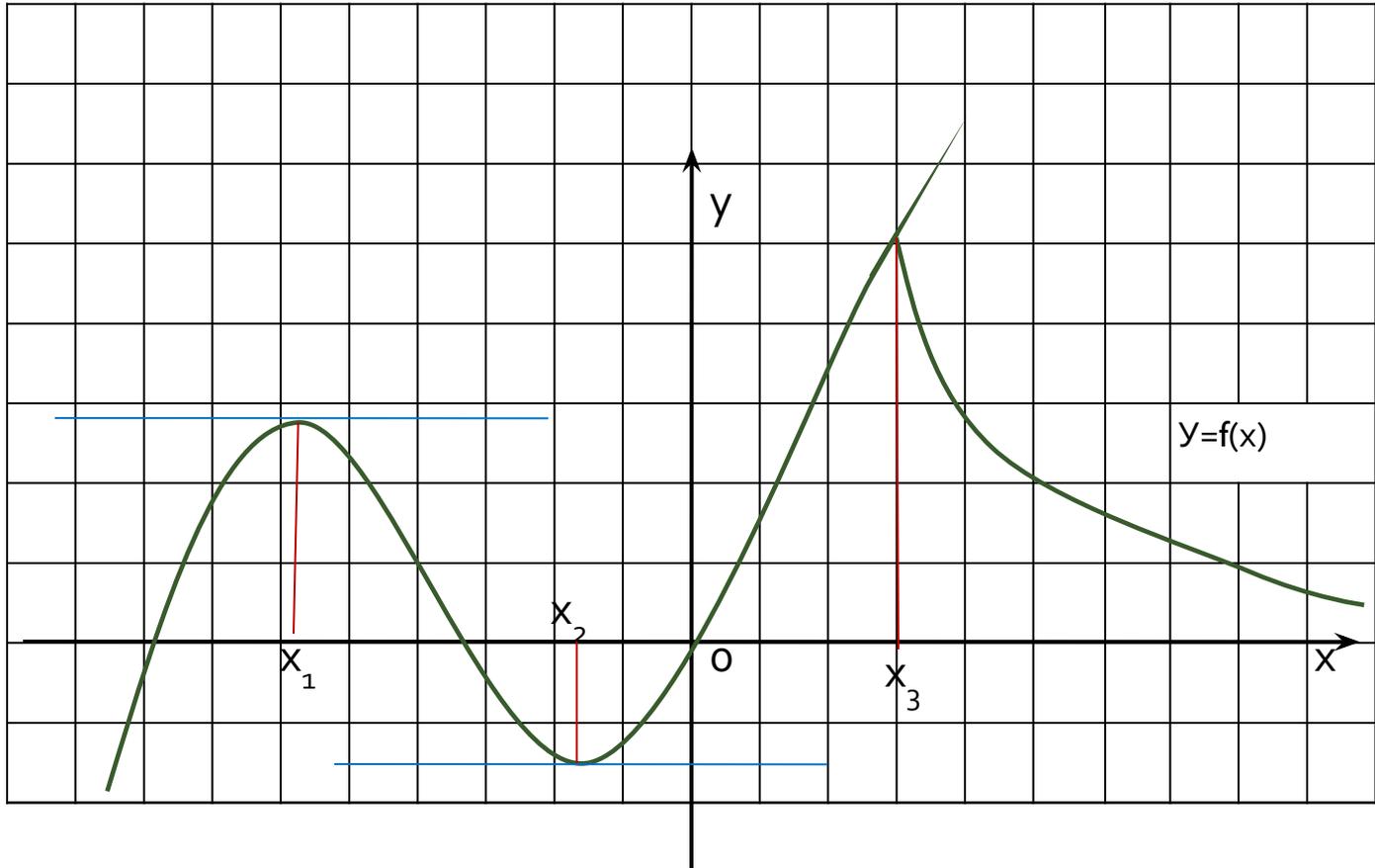
Теорема.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке X и ее производная **неотрицательна** (соответственно **неположительна**) во внутренних точках этого промежутка и равна нулю лишь в конечном множестве точек, то функция $y=f(x)$ **возрастает** (соответственно **убывает**) на X .

Чтобы точка $x=x_0$ была точкой экстремума функции, достаточно, чтобы:(ваше мнение?)



**ОБОБЩАЕМ
ИНФОРМАЦИЮ И
ДЕЛАЕМ ВЫВОДЫ.**



Теорема (достаточные условия экстремума).

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

- а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ - неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ – **точка минимума** функции $y=f(x)$;
- б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ - неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ – **точка максимума** функции $y=f(x)$;
- в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней слева и справа от точки $x = x_0$ знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума **нет**.

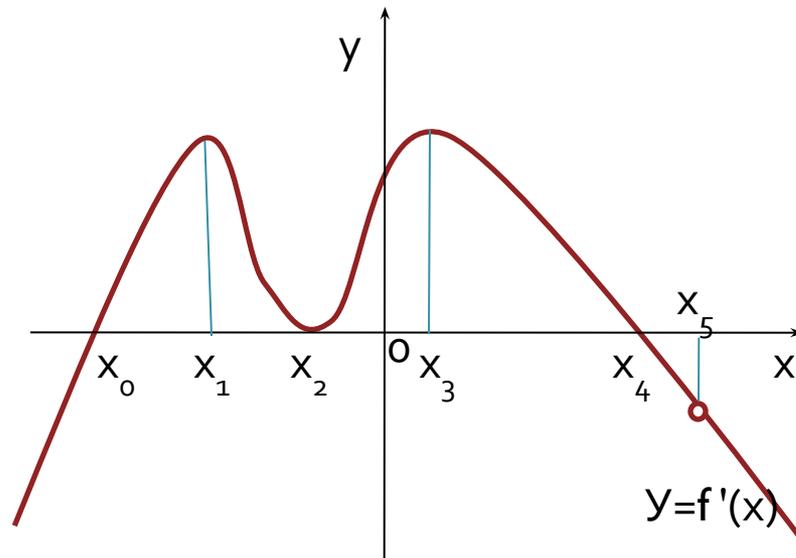
Продумайте формулировку «рабочего» правила!

Решите задачу:

На рисунке – эскиз графика функции

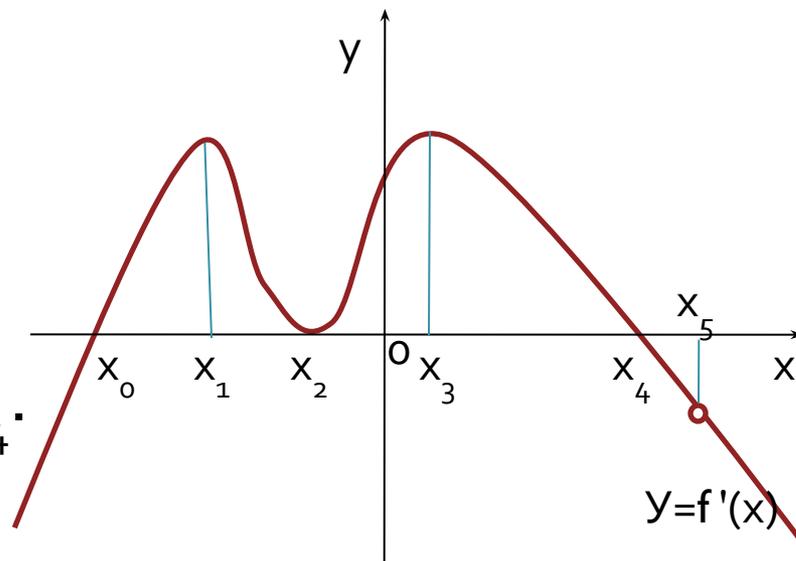
$y=f'(x)$ (график производной функции $y=f(x)$). Укажите:

- Промежутки монотонности функции $y=f(x)$;
- Точки, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна оси абсцисс;
- Стационарные и критические точки;
- Точки минимума и максимума.



Ответы :

- Функция возрастает на промежутках $[x_0; x_2]$ и $[x_2; x_4]$
- Точки, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна оси абсцисс: x_0, x_2, x_4 .
- Стационарные точки: x_0, x_2, x_4 .
Критическая точка: x_5 .
- Точка минимума - x_0 ,
максимума - x_4 .



Успехов!

- Спасибо за внимание!

