Натуральные и целые числа. Делимость целых чисел. НОД и НОК натуральных чисел

Натуральные числа – это числа, которые используются для счета.

1) 3+33=36
2) 12*3=36
3) Не всегда выполняется «-» и «:»

14-15=-1

9:2=4,5

Обозначение: $\boldsymbol{N}$

Целые числа – это все натуральные числа, «0» и противоположные натуральным.

1) 3+33=36
2) 12*3=36
3) 14-15=-1
4) Не всегда выполняется «-» и «:»

   9:2=4,5

Обозначение: ***Z***

$\in$ - знак принадлежности

$\subset$ - знак включения

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$$

<u>Определение</u>. Пусть даны два натуральных числа a и b. Если существует такое q, что выполняется равенство

$$a = bq,$$

то говорят, что число a делится на число b.

a – делимое, b – делитель, q – кратное

Сравните:

$$a : b \qquad\qquad a \vdots b$$

Свойства делимости:

1. Если $a \vdots c$ и $c \vdots b$, то $a \vdots b$;
2. Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a+c) \vdots b$;
3. Если $a \vdots b$ и c *не делится* на b, то $(a+c)$ *не делится* на b;
4. Если $a \vdots b$ и $(a+c) \vdots b$, то $c \vdots b$;
5. Если $a \vdots b_1$ и $c \vdots b_2$, то $ac \vdots b_1 b_2$;
6. Если $a \vdots b$ и c – *любое натуральное* число, то $ac \vdots bc$, если $ac \vdots bc$, то $a \vdots b$;

7. Если $a \vdots b$ и c – *любое натуральное* число, то $ac \vdots b$;

8. Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то для *любых натуральных* n и k справедливо соотношение $(an+ck) \vdots b$;

9. Среди n последовательно натуральных чисел одно и только одно делится на n.

Основные признаки делимости

1. Число делится (без остатка или нацело) на число 2, если его последняя цифра четная или 0;
2. Число делится на число 3, если сумма его цифр делится на 3;
3. Число делится на число 4, если две его последние цифры образуют число, которое делится на 4, или являются нулями.

4. Число делится на число 5, если его последняя цифра 0 или 5;

5. Число делится на число 8, если три его последние цифры образуют число, которое делится на 8, или являются нулями;

6. Число делится на число 9, если сумма его цифр делится на 9;

7. Число делится на число 10, если его последняя цифра нуль.

Пример: Найти пятизначное число, кратное 45, если известно, что каждая из трех его средних цифр на 1 больше предыдущей.

Пусть $\overline{abcde}$ - искомое число.

1) $b=a+1$
$c=a+2$
$d=a+3$

2) Так как $\overline{abcde} \vdots 45$, то $\overline{abcde} \vdots 5$, $\overline{abcde} \vdots 9$ $\Rightarrow$ $e=\{0,5\}$

$e=0$, то $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+0=4a+6$, **$(4a+6)/9$**

$(4a+6) \vdots 3$

$a \vdots 3$

Тогда $a=3$
$a=6$
$a=9$ - не подходит

Если а=3, то 4а+6=18, 18/9 - подходит

Если а=6, то 4а+6=30, не подходит

34560

e=5 ***, то a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+5=4a+11,***

Пусть а=1,2,3,4,5,6,7 (не подходит)

Так как $(4a+11)\vdots 9$ *, то*

а=1, 4+11=15
а=2, `8+11=19
а=3, 12+11=23
а=4, 16+11=27
а=5, 20+11=31
а=6, 24+11=35

45675

Ответ: 34560 и 45675

Простые и составные числа

Определение. Если натуральное число имеет только два делителя – само себя и 1, то его называют простым числом; если оно имеет более двух делителей, то его называют составным числом.

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Теорема. Если натуральное число a больше натурального числа b и a не делится на b, то существует, и притом только одна, пара натуральных чисел q и r, причем $r < b$, такая, что выполняется равенство

$$a = bq+r.$$

№ 1

Определите: на какие из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 15, 18, 20 делится без остатка число

562 320.

№ 2

Определите, простым или составным является число 87 516 540 321.

№ 3

Число *N* дает при делении на 8 остаток 3. Какой остаток при делении на 8 дает число в четыре раза больше данного?

№ 4

Два числа при делении на 16 дают остаток 8. Доказать, что разность и сумма этих чисел без остатка делятся на 16.

№ 5

Разложить на простые множители число 7000.

НОД натуральных чисел

Определение. Наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел *a, Ь, c, ...* называется наибольшее натуральное число, на которое делятся нацело числа *a, Ь, c, …*

Теорема. Если даны два натуральных числа *a* и *p*, причем *p* – простое число, то либо *a* делится на *p*, либо *a* и *p* – взаимно простые числа.

Для нахождения НОД чисел a, Ь, c, ….:

1) выписывают разложения на простые множители чисел *a, Ь, c, ...*;
2) перечисляют все простые множители, входящие во все разложения;
3) каждый из перечисленных множителей возводят в минимальную степень, с которой этот множитель входит в разложения.

№ 6

Найти наибольший общий делитель чисел 48, 60, 72.

Решение:

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$$

НОД (48, 60, 72) $= 2^2 \cdot 3 = 12$

НОК натуральных чисел

<u>*Определение.*</u> Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел *a, b, c, ...* называется наименьшее натуральное число, которое нацело делится на эти числа *a, b, c,...*

<u>*Теорема.*</u> Для любых натуральных чисел *a* и *b* справедливо равенство

$$\text{НОД}\,(a,b)\cdot\text{НОК}(a,b)=ab.$$

<u>*Следствие.*</u> Если числа *a* и *b* взаимно простые, то НОК(*a, b*) = *ab*.

Для нахождения НОК Чисел а, Ь, с,...:

1) выписывают разложения на простые множители чисел *а, Ь, с,...;*
2) перечисляют все простые множители, входящие хотя бы в одно из этих разложений;
3) каждый из перечисленных множителей возводят в максимальную степень, с которой этот множитель входит в разложения;
4) произведение полученных степеней простых множителей дает НОК чисел *а, Ь, с, …*

№ 7

Найти наименьшее общее кратное чисел 48, 60, 72.

Решение:

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

НОК (48, 60, 72) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

1) 562320 – четное, значит делится без остатка на 2;
2) 5 + 6 + 2 + 3 + 2 + 0 = 18, 18 делится на 3 и на 9, значит 562320 делится на 3 и на 9;
3) 562320 – две последние цифры образуют число 20, которое делится на 4, значит 562 320 делится на 4;
4) 562320 – оканчивается на 0, значит 562320 делится на 5 и на 10;
5) Т.к. 562320 делится на 2 и на 3, а числа 2 и 3 – взаимно простые, то 562320 делится на произведение 2 и 3, т.е. на 6;
6) 562320 – три последние цифры образуют число 320, которое делится на 8, значит 562320 делится на 8;
7) Т.к. 562320 делится на 3 и 5 (3 и 5 – взаимно простые), то 562320 делится на 15;
8) Т.к. 562320 делится на 2 и 9 (2 и 9 – взаимно простые), то 562320 делится на 18;
9) Т.к. 562320 делится на 4 и 5 (4 и 5 – взаимно простые), то 562320 делится на 20.

Если найдется хотя бы один делитель числа 87 516 540 321, отличный от 1 и самого этого числа, то 87 516 540 321 – составное.

8 + 7 + 5 + 1 + 6 + 5 + 4 + 0 + 3 + 2 + 1 = 42

42 делится на 3, значит и число

87 516 540 321 делится на 3, а значит заданное число является составным.

- $$N = 8b + 3$$

$$4N = 4(8b + 3) = 32b + 12 = 8 \cdot 4b + (8 \cdot 1 + 4)$$

$$4N = 8(4b + 1) + 4$$

Ответ: 4.

- $$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} n = 16b_1 + 8 \\ k = 16b_2 + 8 \end{array} \\ \hline n + k = 16b_1 + 16b_2 + 8 + 8 \end{array}$$

$$n + k = 16b_1 + 16b_2 + 8 + 8 =$$
$$= 16(b_1 + b_2) + 16 =$$
$$16(b_1 + b_2 + 1) + 0.$$

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{l} n = 16b_1 + 8 \\ k = 16b_2 + 8 \end{array} \\ \hline n - k = 16b_1 - 16b_2 + 8 - 8 \end{array}$$

$$n - k = 16b_1 - 16b_2 + 8 - 8 =$$
$$= 16(b_1 - b_2) + 0.$$

Разложить на простые множители число 7000

- $7000 = 7 \cdot 1000 = 7 \cdot 10^3 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$

$\boxed{10 \cdot 10 \cdot 10}$

$\boxed{10^3 = (2 \cdot 5)^3}$

Используемая литература

1. Алгебра.10 класс. Часть 1. Учебник. Профильный уровень. Мордкович А.Г., Семенов П. В.;