Равносильность уравнений

Равносильные уравнения

Два уравнения с одной переменной f(x)=g(x) и p(x)=h(x) называют **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Пример №1: уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$

равносильны. Оба они имеют по два корня : 2 и -2.

Этапы решения уравнений:

- ПЕРВЫЙ ЭТАП – ***технический*** . Выполнение преобразований для получения более простого уравнения, нахождения корня последнего (самого простого) уравнения.
- ВТОРОЙ ЭТАП – ***анализ решения***. Анализ проведенных преобразований, ответ на вопрос все ли преобразования были равносильны.
- ТРЕТИЙ ЭТАП – ***проверка***. Проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

равносильности уравнений:

- «спокойные» – гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не приводит к потере или приобретению посторонних корней.
- «беспокойные» – они работают лишь при определенных условиях, их использование может привести к потере или приобретению посторонних корней.

«спокойные» теоремы:

- ***Теорема 1***. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.
- ***Теорема 2***. *Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.*
- ***Теорема 3***. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

(где a>0, a≠1) равносильно уравнению f(x)=g(x).

«беспокойные» теоремы:

Теорема 4. ***Если обе части уравнения*** f(x)=g(x) умножить на одно и то же выражение h(x), которое:

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения f(x)=g(x);

б)нигде в этой области не обращается в 0, - то получится уравнение f(x) h(x) =g(x) h(x), равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части уравнения f(x)=g(x) неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же чётную степень n получится уравнение, равносильное данному: $f(x)^n = g(x)^n$

Теорема 6. Если f(x)>0 и g(x)>0, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где a>0 и a≠1, равносильно уравнению f(x)=g(x).

Примеры появления посторонних корней:

- Пример№2. Уравнение x – 1 = 3 имеет один корень x = 4.

Умножим обе части уравнения на (x – 2), получим уравнение (x – 1)(x – 2) = 3(x – 2), имеющее два корня:

$x_1 = 4$ и $x_2 = 2$.

Выполним проверку корней,

корень $x_2 = 2$ является посторонним.

Мы нарушили условие Теоремы 4 : выражение, на которое мы умножаем обе части уравнения, нигде не должно обращаться в 0. Выражение x – 2 обращается в 0 при x = 2 – именно это значение и оказалось посторонним корнем.

Пример №3. Уравнение x – 1 = 3 имеет один корень x = 4.

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим уравнение $(x-1)^2 = 9$, имеющее два корня:

$x_1 = 4$ и $x_2 = -2$

Выполним проверку корней.

Корень $x_2 = -2$ является посторонним.

Мы нарушили условие Теоремы 5: обе части уравнения должны быть неотрицательны. Про выражение x – 1 этого утверждать мы не можем.

Пример №4. Рассмотрим уравнение $\ln(2x - 4) = \ln(3x - 5)$. Потенцируя, получаем 2x – 4 = 3x – 5с единственным корнем

X = 1.

Выполним проверку по ОДЗ: $\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 3x - 5 > 0 \end{cases}$

Корень оказался посторонним, поскольку оба выражения под знаком логарифма принимают отрицательные значения.

Мы нарушили условие Теоремы 6: выражения под знаками логарифмов должны быть положительными, о данных выражениях этого утверждать нельзя.

Причины появления посторонних корней:

- 1) Освобождение от знаменателей, содержащих переменную величину;
- 2) Освобождение от знаков корней четной степени;
- 3) Освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.
- 4) Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;
- 5) Умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной.

ПРОВЕРКА КОРНЕЙ ОБЯЗАТЕЛЬНА!!!

Пример№5:

Решите уравнение $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5$.

ПЕРВЫЙ ЭТАП – ***технический.***

$x_1 = 2$ и $x_2 = 44\frac{2}{9}$.

ВТОРОЙ ЭТАП – ***анализ решения.***

Возведение в квадрат, избавление от квадратного корня.

ТРЕТИЙ ЭТАП – ***проверка.***

$x_2 = 44\frac{2}{9}$- посторонний корень.

Ответ: x = 2.

Пример№6:

Решите уравнение $\ln(x+4)+\ln(2x+3)=\ln(1-2x)$

ПЕРВЫЙ ЭТАП – ***технический.***

$x_1=-1$ и $x_2=-5{,}5$

ВТОРОЙ ЭТАП – ***анализ решения.***

Освобождение от знаков логарифма.

ТРЕТИЙ ЭТАП – ***проверка.***

Проверка по ОДЗ: $\begin{cases} x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$

Х = -5,5 – посторонний корень

Ответ: х = -2.

Причины потери корней:

- 1) деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);
- 2) сужение ОДЗ в процессе решения задачи (не верное применение формул, не соответствие левой и правой частей уравнения).

Как избежать потери корней

1) ***НЕ ДЕЛИТЬ ОБЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ НА ОДНО И ТО ЖЕ ВЫРАЖЕНИЕ h(x) !!!***

Уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ заменить уравнением

$h(x)(f(x) - g(x)) = 0$, а не уравнением $f(x) = g(x)$.

2) ***Применяя при решении уравнения какую-либо формулу, следите за тем, чтобы области допустимых значений переменной для правой и левой частей уравнения были одинаковыми.***

Пример№7

Решим уравнение $\log x^2 = 4.$

1 способ: Воспользуемся определением логарифма

$x^2 = 10^4;$

$x_1 = 100$ и $x_2 = -100.$

2 способ: Воспользуемся формулой, получим $2\log x \quad = 4;$

$\log x \quad = 2;$ x = 100.

Произошло сужение ОДЗ, корень x = -100 был потерян.

Была неверно применена формула : $\log x^2 = 2\log|x|.$

Получилось, что для $\log x^2$ (x≠0, x>0, x<0) , а для $2\log x$ (x≠0, x>0).