

СЕМИНАР-ПРАКТИКУМ

«Методы решения планиметрических задач»

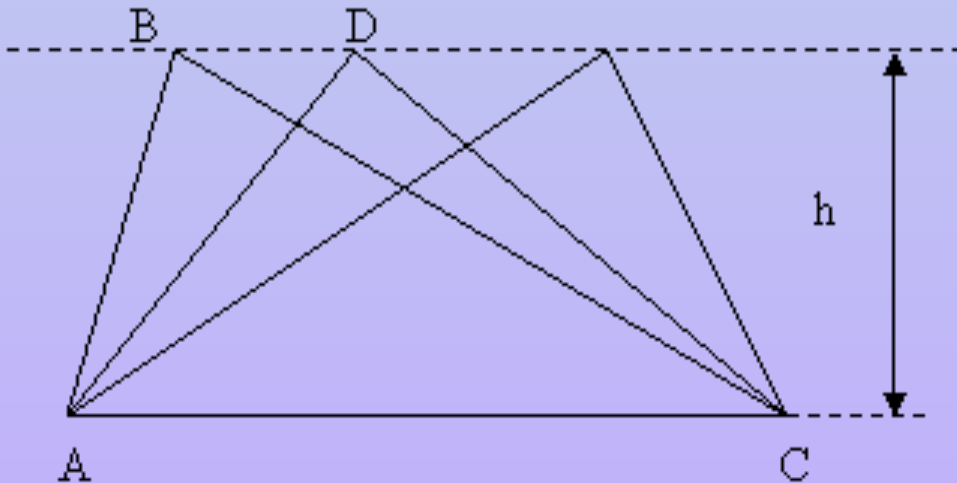
Метод площадей в решении задач

Квасова О.Д.,
учитель математики ВКК

Основные свойства площадей

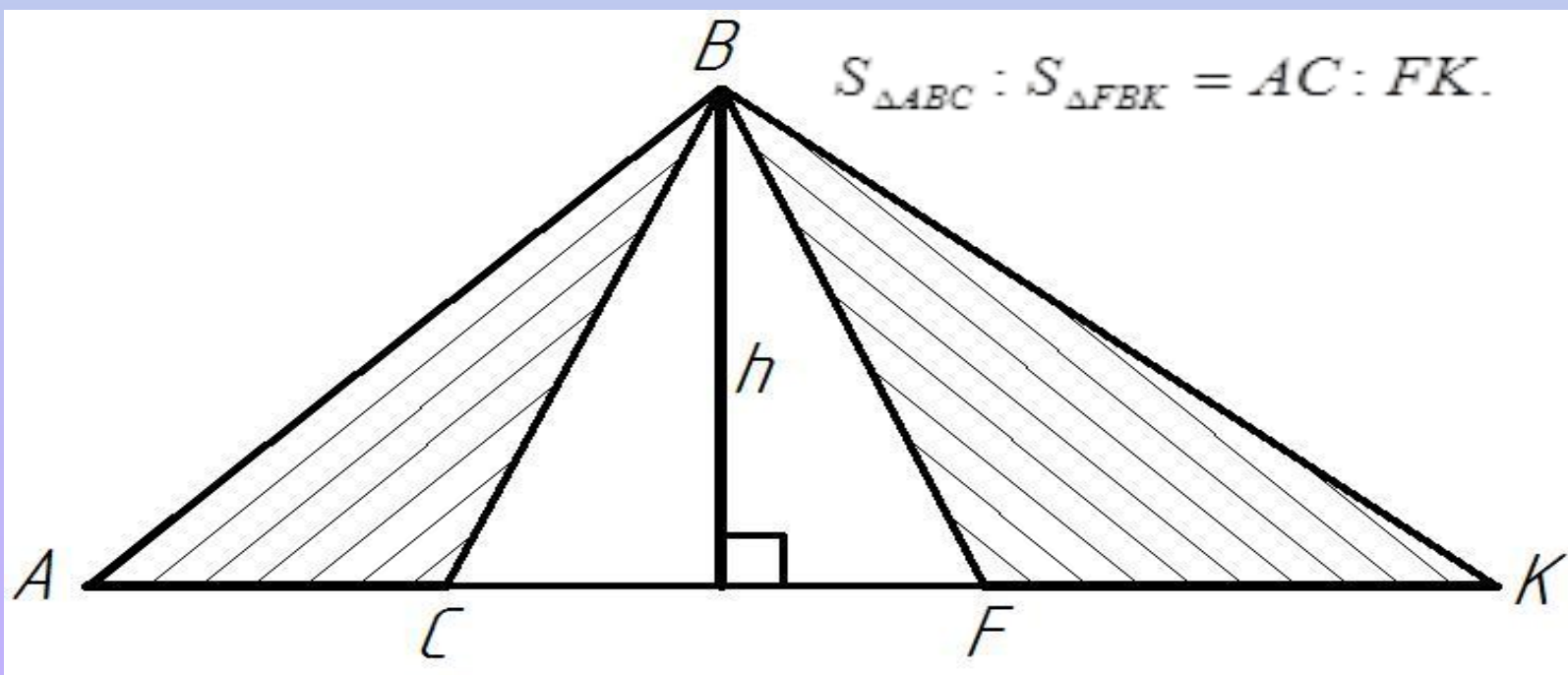
- Свойство №1

Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то площадь при этом не изменится.



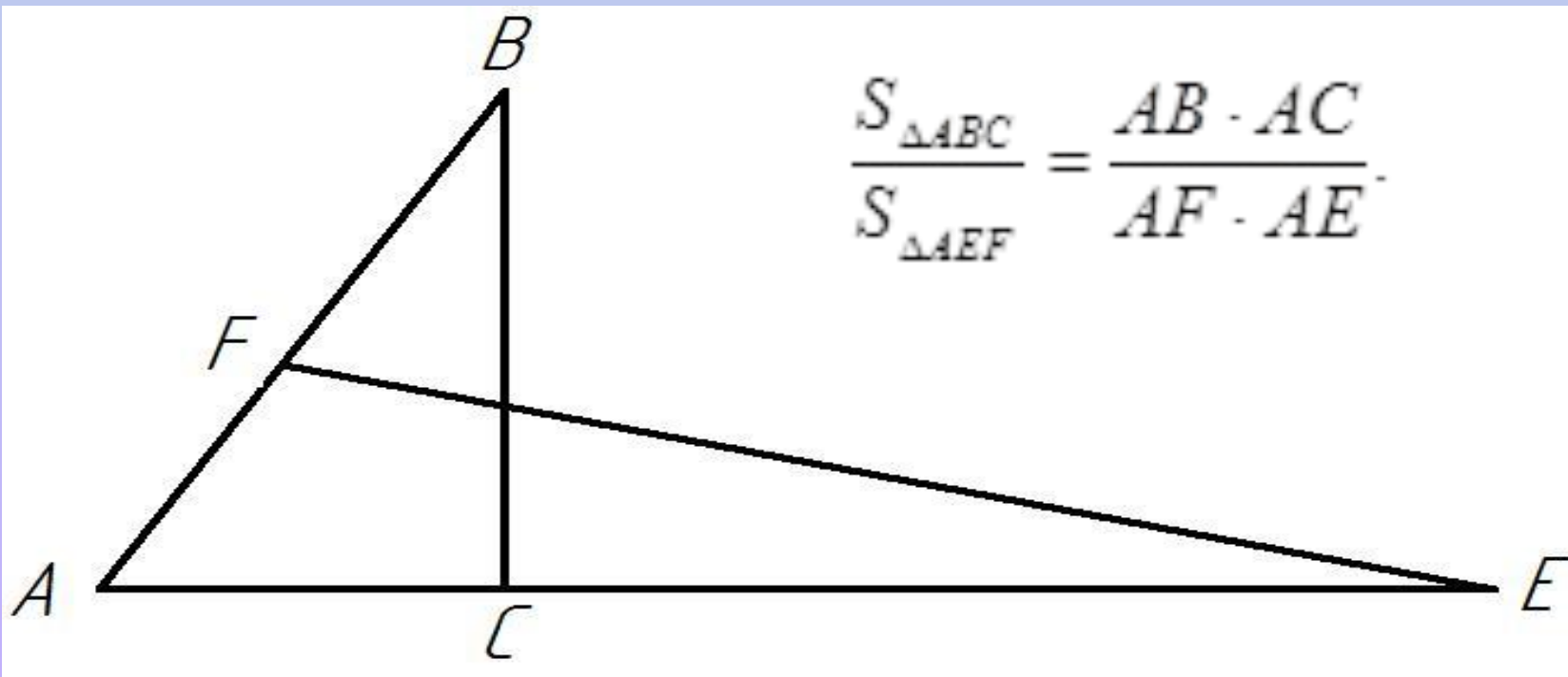
Свойство №2

Если два треугольника имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований (сторон, на которые опущены эти высоты).



Свойство №3

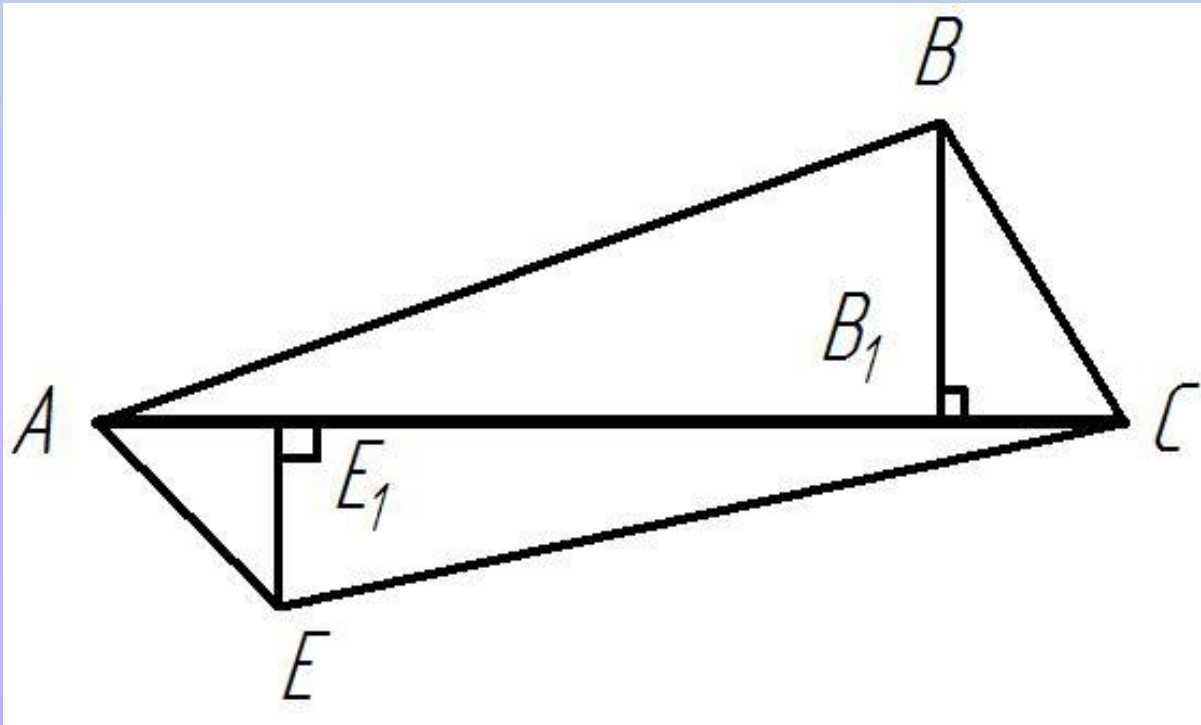
Если два треугольника имеют общий угол (или равный угол), то их площади относятся как произведение сторон, заключающих этот угол.



Свойство №4

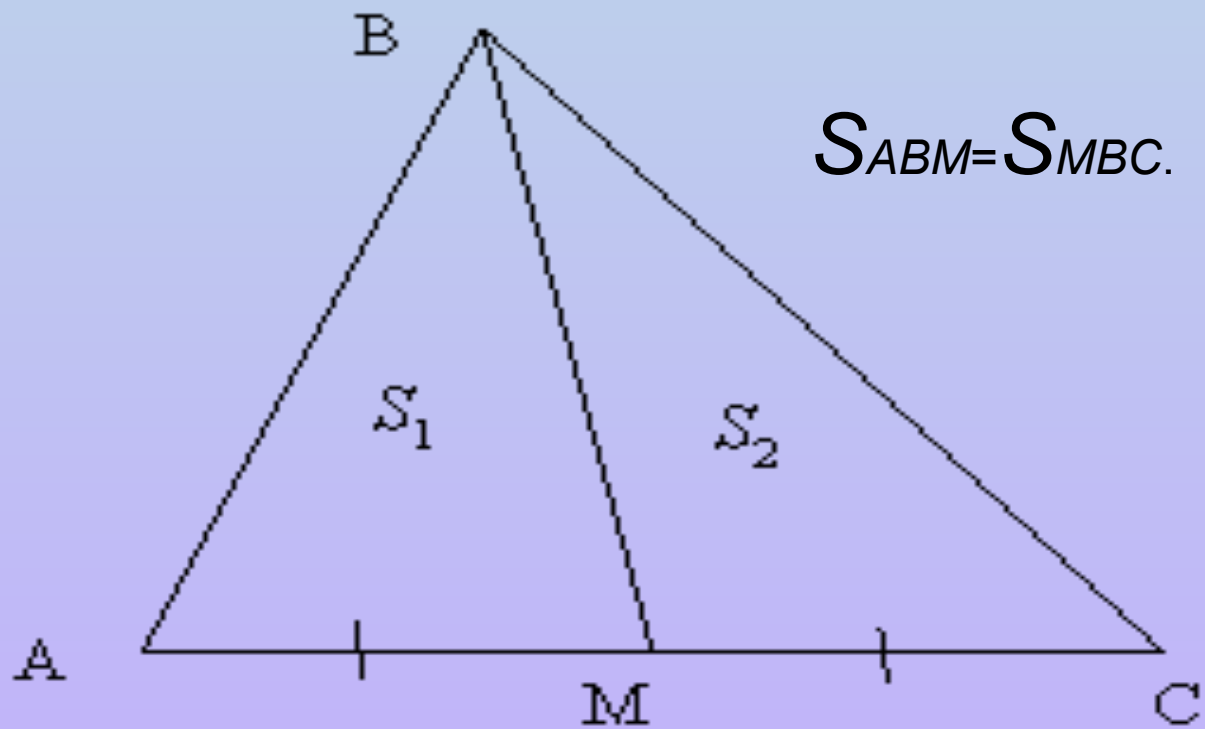
Площади треугольников, имеющих равные стороны, относятся как соответствующие этим сторонам высоты.

$$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle AEC} = BB_1 : EE_1.$$



Свойство №5

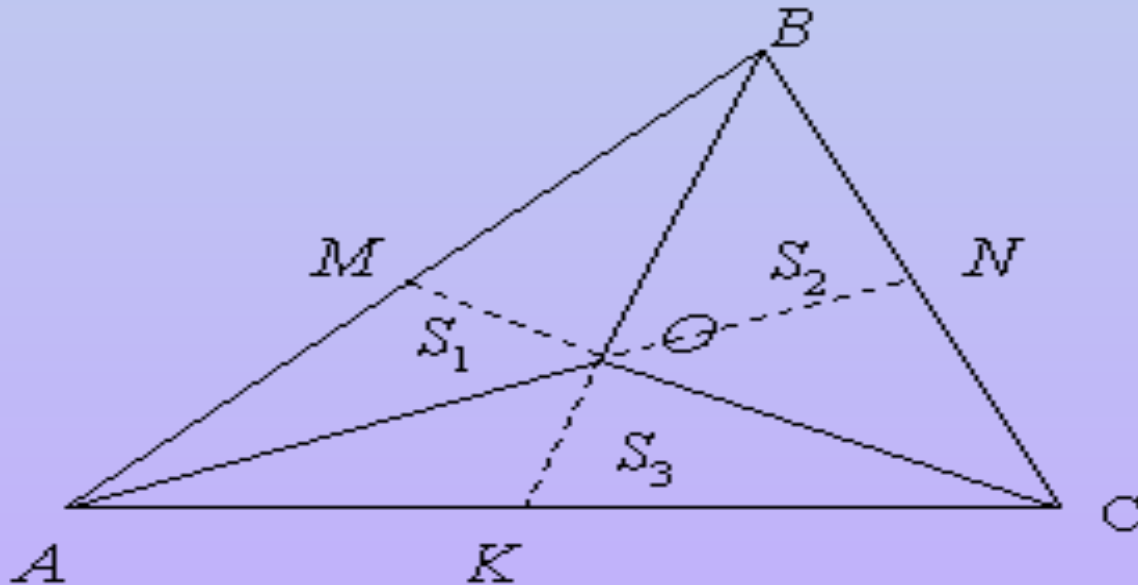
Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.



Свойство №6

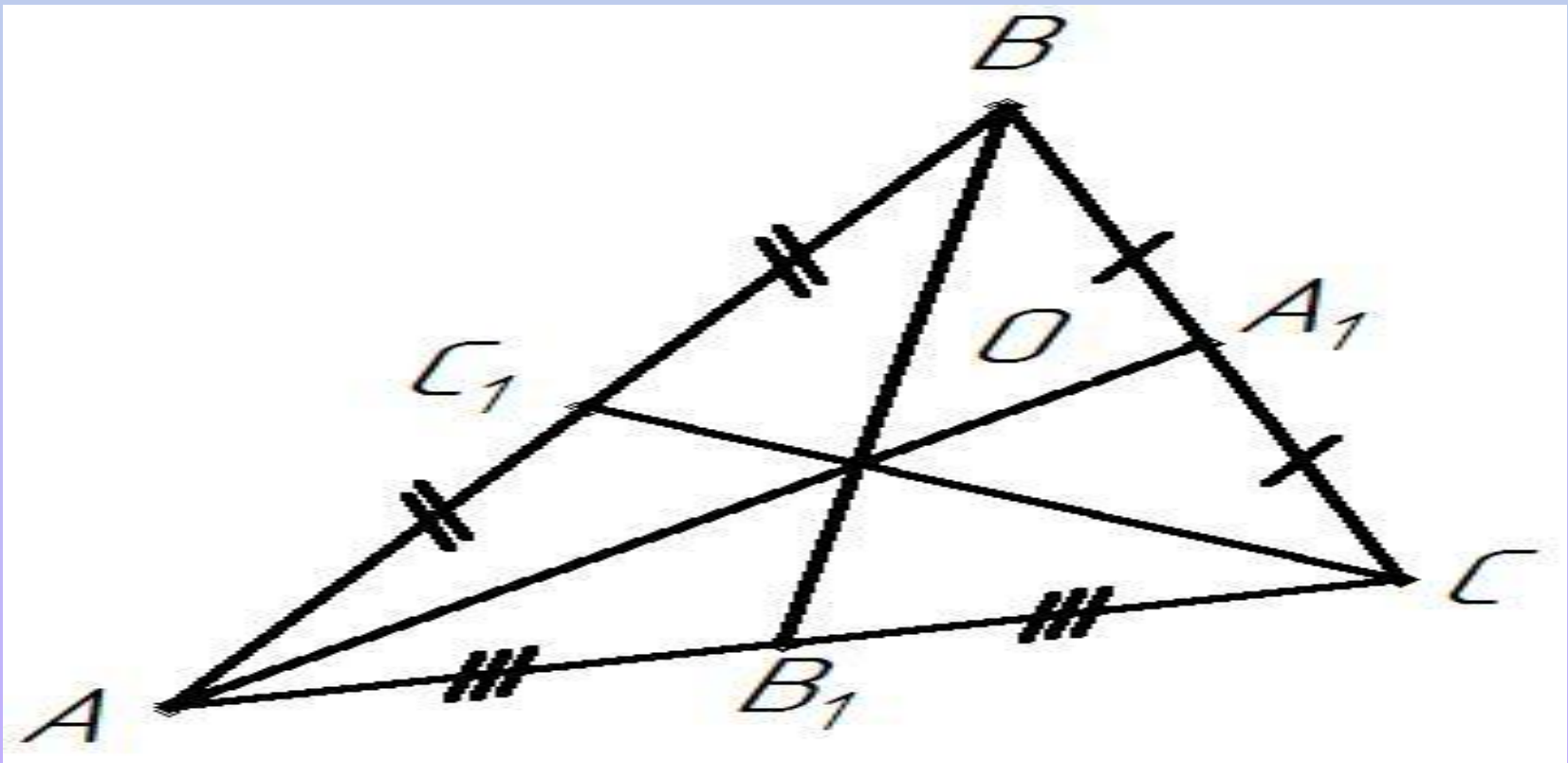
1) Три медианы треугольника делят его на три равновеликих треугольника.

$$S_{AOB}=S_{COB}=S_{AOC}$$



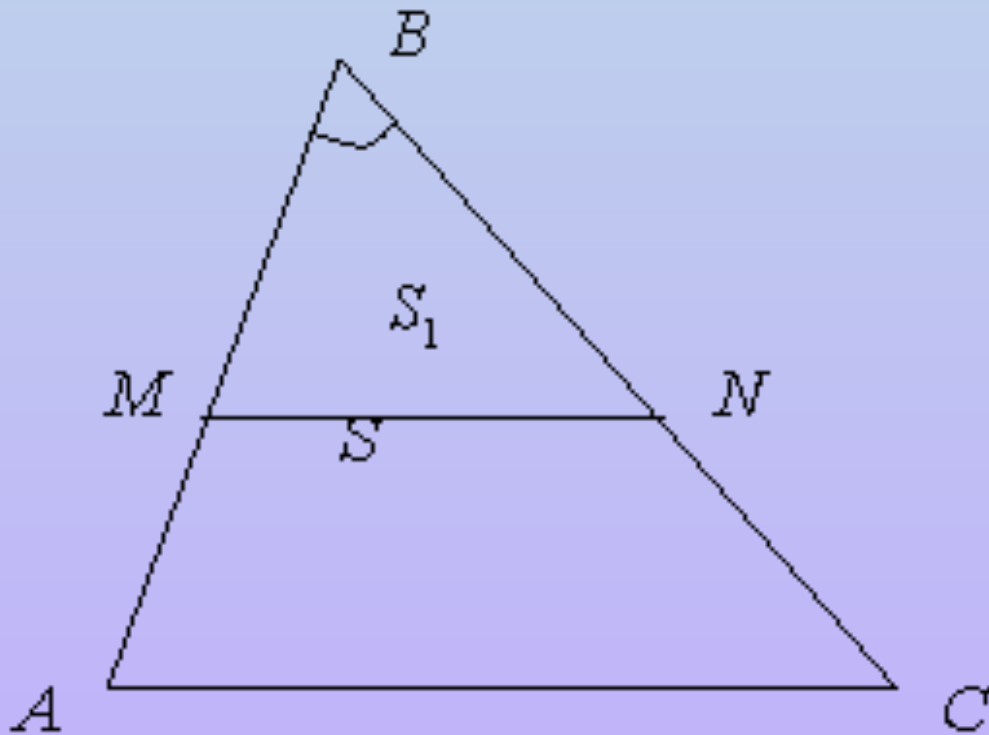
2) Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

$$S_{AOC_1} = S_{BOC_1} = S_{BOA_1} = S_{COA_1} = S_{COB_1} = S_{AOB_1}.$$



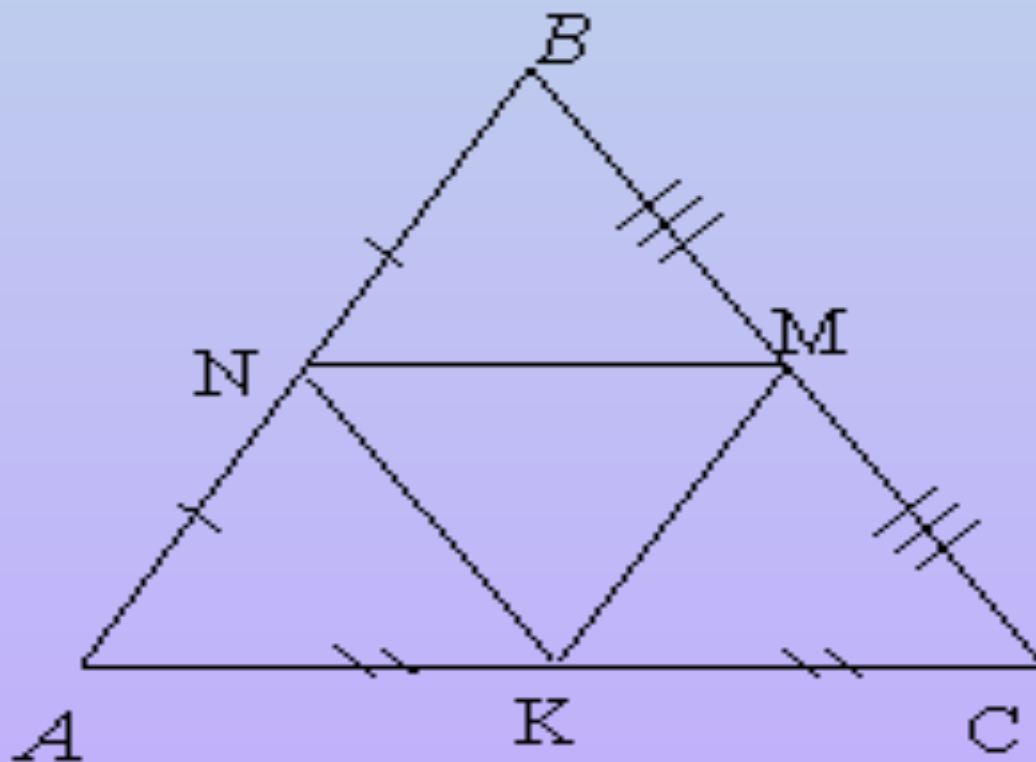
Свойство №7

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.



Свойство №8

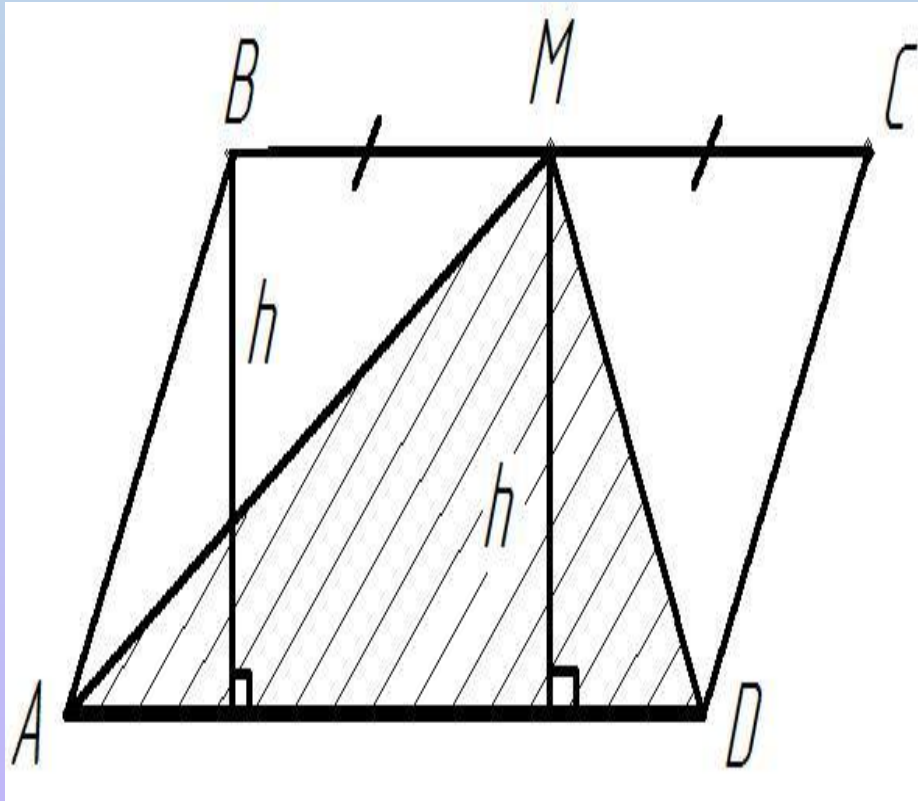
Средние линии треугольника площади S отсекают от него треугольники площади $\frac{1}{4} S$.



Задача1

Дано: $ABCD$ - параллелограмм, $BM=MC$, $S_{ABM}=4$

Найти: S_{AMD}



$$\frac{S_{\triangle AMD}}{S_{\triangle ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot h \cdot AD}{h \cdot AD} = \frac{1}{2},$$

$$S_{AMD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$S_{ABM} = S_{CMD}$$

$$S_{ABM} + S_{CMD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 8$$

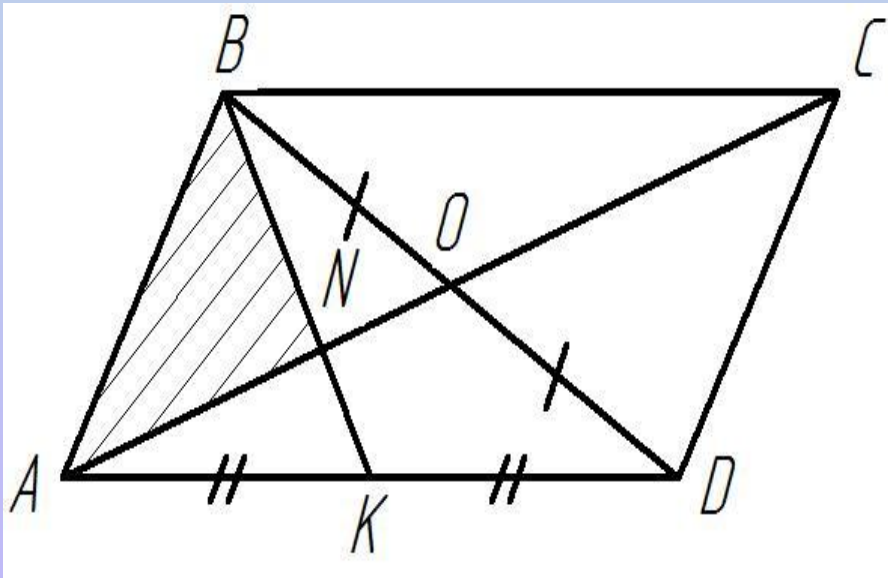
$$S_{AMD} = 8$$

Задача 2

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AK=KD$

$BK \cap AC = N$, $S_{ABCD} = 60$.

Найти: S_{ABN}



$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DBC} = 30,$$

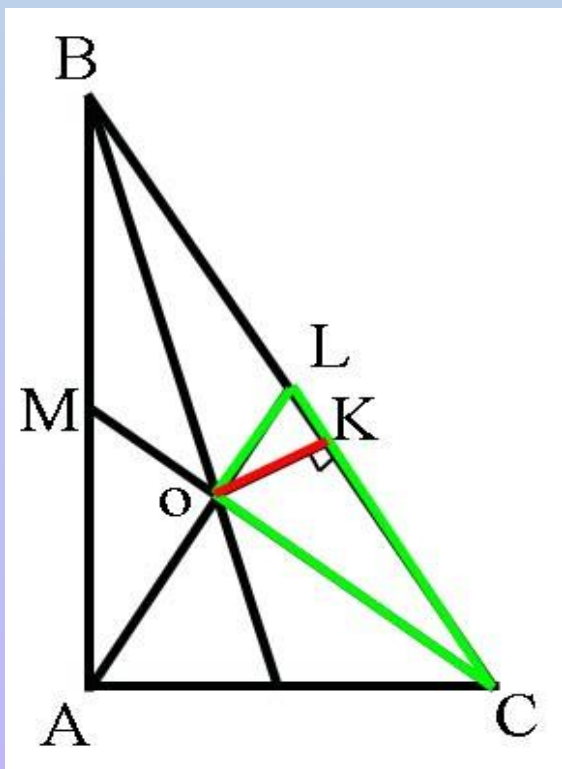
$$S_{\triangle ABN} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD}.$$

(свойство №6 (1))

$$S_{ABN} = 10$$

Задача 3

*Найти расстояние от точки пересечения медиан
прямоугольного треугольника до его гипотенузы, равной 25
см, если один из катетов равен 20 см.*



Дано: $\triangle ABC$ ($\angle A=90$), $BC=25$ см, $AB=20$ см.

O - точка пересечения медиан,

$OK \perp BC$

Найти: OK .

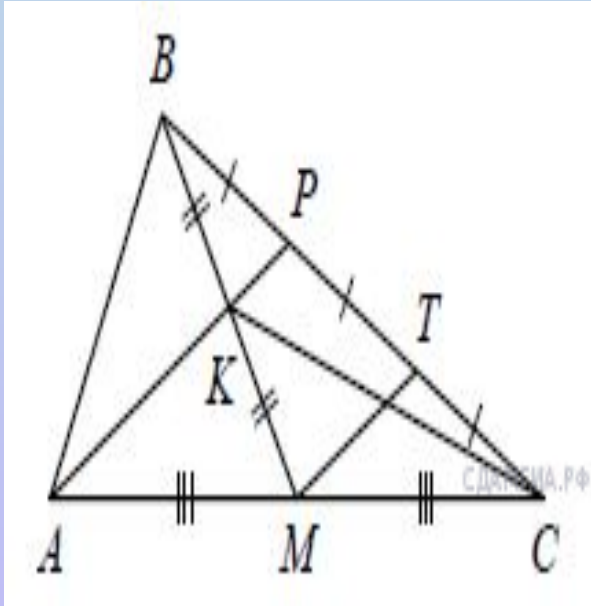
Решение:

1. $\triangle ABC$ ($\angle A=90$). По теореме Пифагора $AC=15$.
2. O - точка пересечения медиан,
 $S_{OLC} = S_{ABC} / 6$; (свойство №6 (2))
 $S_{OLC} = 150 / 6$; $S_{OLC} = 25$
3. С другой стороны $S_{OLC} = 1/2 LC \cdot OK$;
 $OK = 2 S_{OLC} / LC$; $OK = 4$ см.

Ответ: 4см.

Задача 4

Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.



Решение.

Проведём отрезок MT , параллельный AP . Тогда MT — средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP — средняя линия треугольника BMT и $TP = BP$.

Обозначим площадь треугольника BKP через S . Тогда $S_{\Delta KPC} = 2S$, т.к. треугольник KPC имеет ту же высоту и вдвое больше основание.

Значит, $S_{\Delta CKB} = S_{\Delta CKM} = 3S$ (CK — медиана треугольника CMB).

$S_{\Delta CKM} = S_{\Delta AKM} = 3S$ (KM — медиана треугольника AKC). $S_{\Delta ABK} = S_{\Delta AKM} = 3S$ (AK — медиана треугольника AMB).

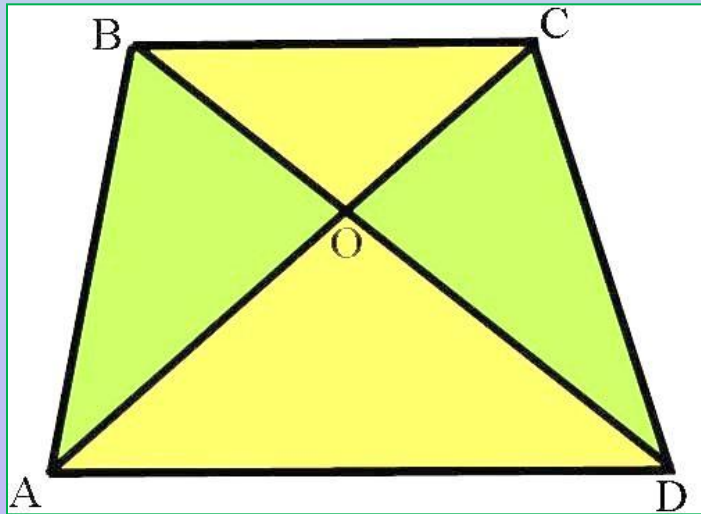
Итак, $S_{KPCM} = S_{\Delta CKM} + S_{\Delta KPC} = 5S$. $S_{\Delta ABK} = 3S$

Значит, $S_{\Delta ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5 = 0,6$

Ответ: 0,6.

Утверждение 1

В четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны тогда и только тогда, когда треугольники ABO и CDO равновелики (O – точка пересечения диагоналей четырехугольника).



Дано: $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$

Доказать: $AD \parallel BC$.

Доказательство.

1. Т. к. $S_{\triangle AOB} = 1/2 OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$ и $S_{\triangle COD} = 1/2 OC \cdot OD \cdot \sin \angle COD$, то $OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = OC \cdot OD \cdot \sin \angle COD$.

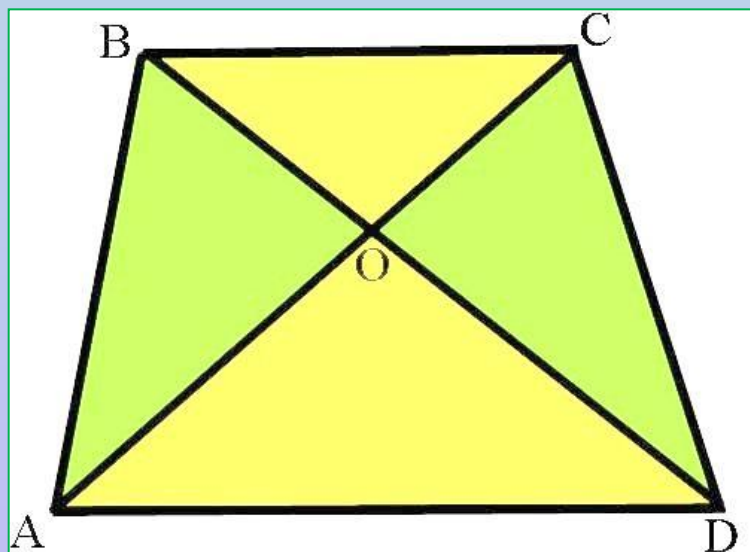
$AO \cdot BO = CO \cdot DO$; т.е. $AO:OC = DO:OB$.

2. $\triangle AOD \sim \triangle COB$ (по 2 признаку подобия: $AO:OC = DO:OB$ и $\angle AOB = \angle BOC$ как вертикальные).

Значит, $\angle BCO = \angle OAD$.

3. Т.к. $\angle BCO = \angle OAD$ и они накрест-лежащие при прямых AD и BC и секущей AC , то $AD \parallel BC$.

Обратное утверждение



Дано: $AD \parallel BC$.

Доказать: $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$.

Доказательство.

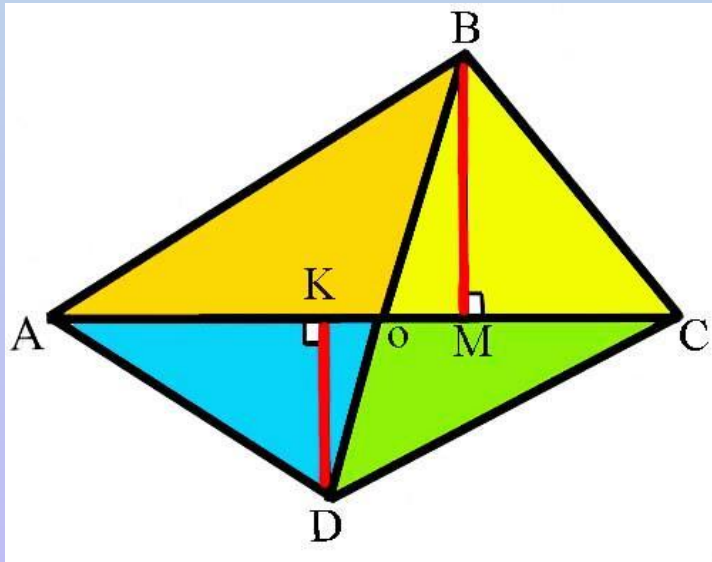
1. $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BOC}$,
и $S_{\triangle COD} = S_{\triangle DBC} - S_{\triangle BOC}$.

2. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC}$, т. к. они имеют одно и то же основание BC, а опущенные на него высоты равны, поскольку $AD \parallel BC$.

Значит, $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$.

Утверждение 2

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняется равенство $S_{\triangle AOB} \cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle AOD} \cdot S_{\triangle BOC}$ (O – точка пересечения диагоналей).



Доказательство.

1. $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$ имеют общую высоту BM .

Поэтому : $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} = AO : OC$

2. Аналогично:

$S_{\triangle AOD} : S_{\triangle COD} = AO : OC.$

3. Из этих двух равенств следует, что

$$S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOD} : S_{\triangle COD}, \text{ или}$$
$$S_{\triangle AOB} \cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle AOD} \cdot S_{\triangle BOC}$$

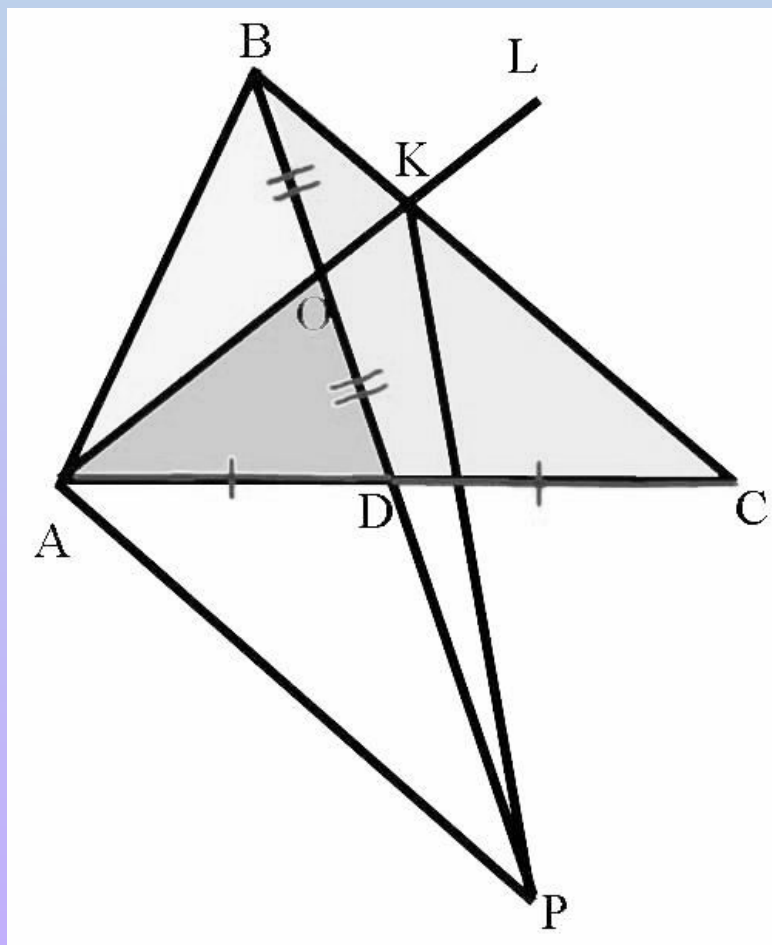
В случае, если $AD \parallel BC$

$$S_{\triangle AOB}^2 = S_{\triangle COD}^2 = S_{\triangle AOD} \cdot S_{\triangle BOC} \text{ или}$$
$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} = \sqrt{S_{\triangle AOD}} \sqrt{S_{\triangle BOC}}$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = (\sqrt{S_{\triangle AOD}} + \sqrt{S_{\triangle BOC}})^2$$

Задача 5

В треугольнике ABC проведена медиана BD , а через её середину и вершину A проведена прямая AL . В результате такого построения треугольник ABC разбит на три треугольника и один четырехугольник. Найти площади этих фигур, если площадь ABC равна 60.



Решение:

1. Так как BD – медиана, то

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD} = 0,5 S_{\triangle ABC} = 30;$$

2. AO – медиана в треугольнике ABD , поэтому $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} = 0,5 S_{\triangle ABD} = 15$.

3. Продолжим медиану BD за точку D так, что $DP = BD$. Рассмотрим четырехугольник $ABKP$. По построению, $BD = DP$, тогда $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADP} = 30$.

4. Точка D стала точкой пересечения диагоналей четырехугольника $ABCP$, в которой они делятся пополам. Тогда $ABCP$ – параллелограмм, т.е. $AP \parallel BK$.

5. Значит, $S_{\triangle POK} = S_{\triangle AOB} = 15$.

6. В силу утверждения 2 можем заключить, что $S_{\triangle AOB}^2 = S_{\triangle AOP} \cdot S_{\triangle BOK}$.

Заметим, что $S_{\triangle AOP} = 3 S_{\triangle AOB} = 3 \cdot 15 = 45$,
 $225 = 45 \cdot S_{\triangle BOK}$, откуда $S_{\triangle BOK} = 5$.

Тогда $S_{\text{OKCD}} = 60 - 30 - 5 = 25$

Ответ: $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} = 15$; $S_{\triangle BOK} = 5$; $S_{\text{OKCD}} = 25$

Задача 6

Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CED}$. Площадь четырехугольника $ABCD$ больше площади треугольника ABE не более чем в 4 раза. Найти CD , если $AB = \sqrt{7}$

Решение.

1. Так как $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CED}$, тогда по утверждению 1 $AD \parallel BC$.

2. Пусть $S_{\triangle AED} = S_1$, $S_{\triangle BEC} = S_2$.

Из утверждения 2 следует, что $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CED} = \sqrt{S_1 S_2}$.

3. Так как $\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle ABE}} \leq 4$, т.е. $\frac{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}{\sqrt{S_1 S_2}} \leq 4$ $\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} + \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} + 2 \leq 4$

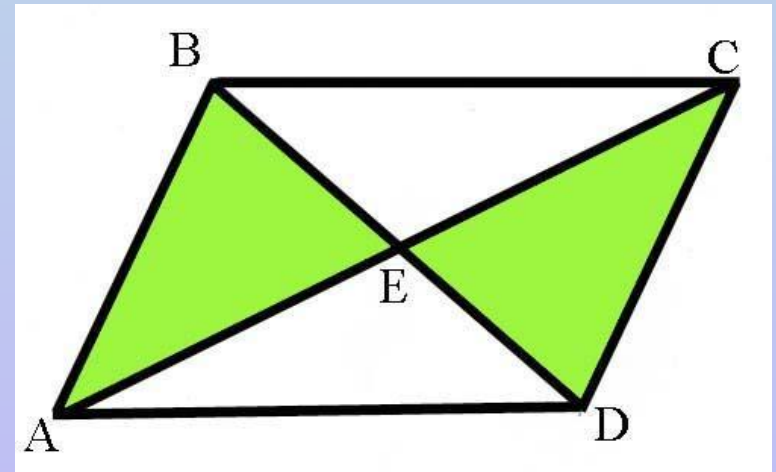
Значит,

$$\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} + \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \leq 2$$

4. Равенство имеет место только в том случае, когда

$$\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = 1, \text{ т.е. } S_1 = S_2$$

5. Значит, в силу утверждения 1, заключаем, что $AB \parallel CD$. Тогда $ABCD$ – параллелограмм и $CD = AB = \sqrt{7}$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!