

Алгебра и начала математического анализа

11 класс

Дифференцирование показательной и логарифмической функции

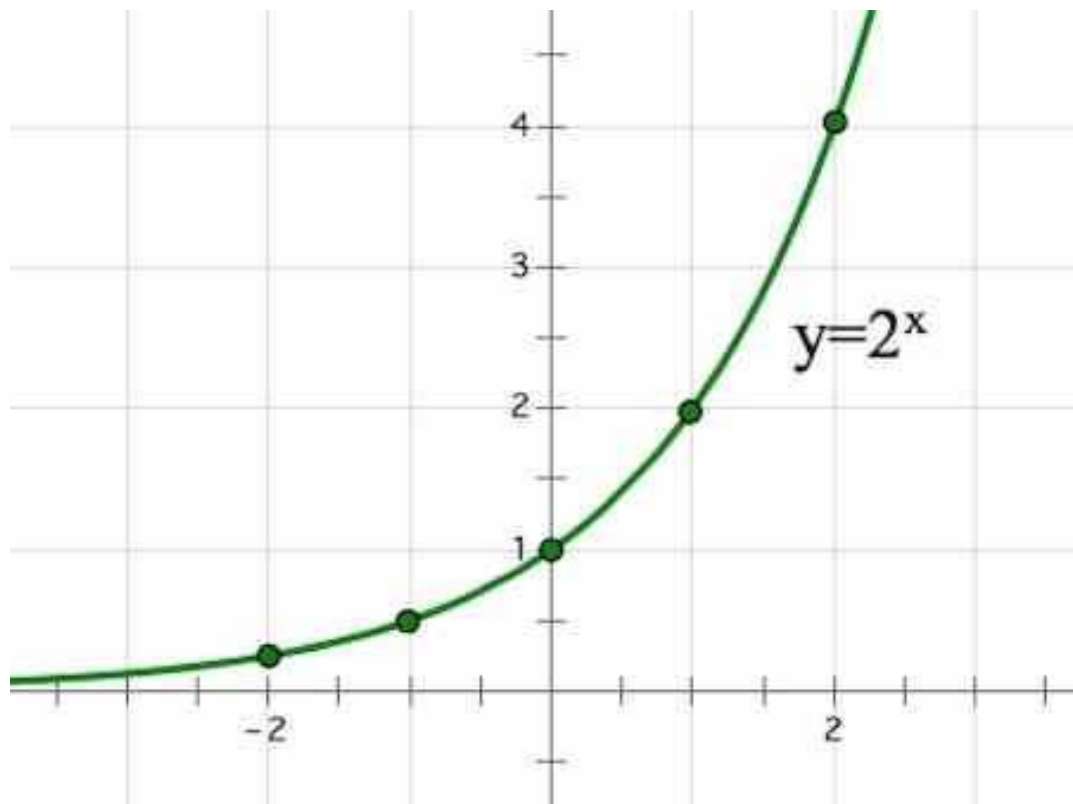


Число e . Функция $y = e^x$, её
свойства, график,
дифференцирование

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$, где $a > 1$.

Построим для различных оснований a графики:

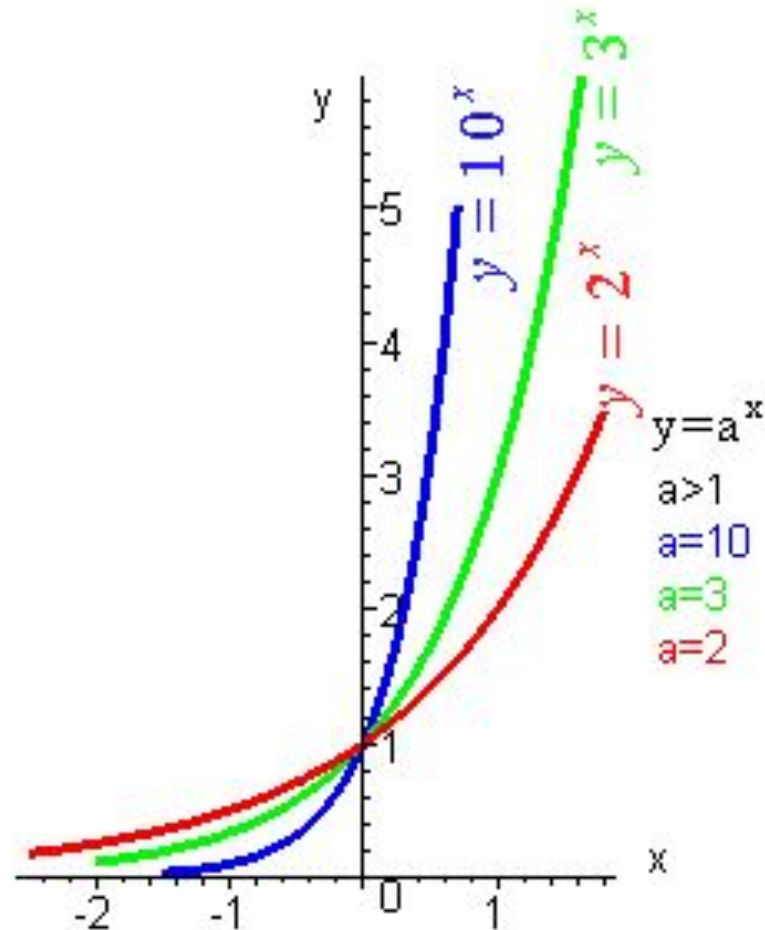
1. $y = 2^x$



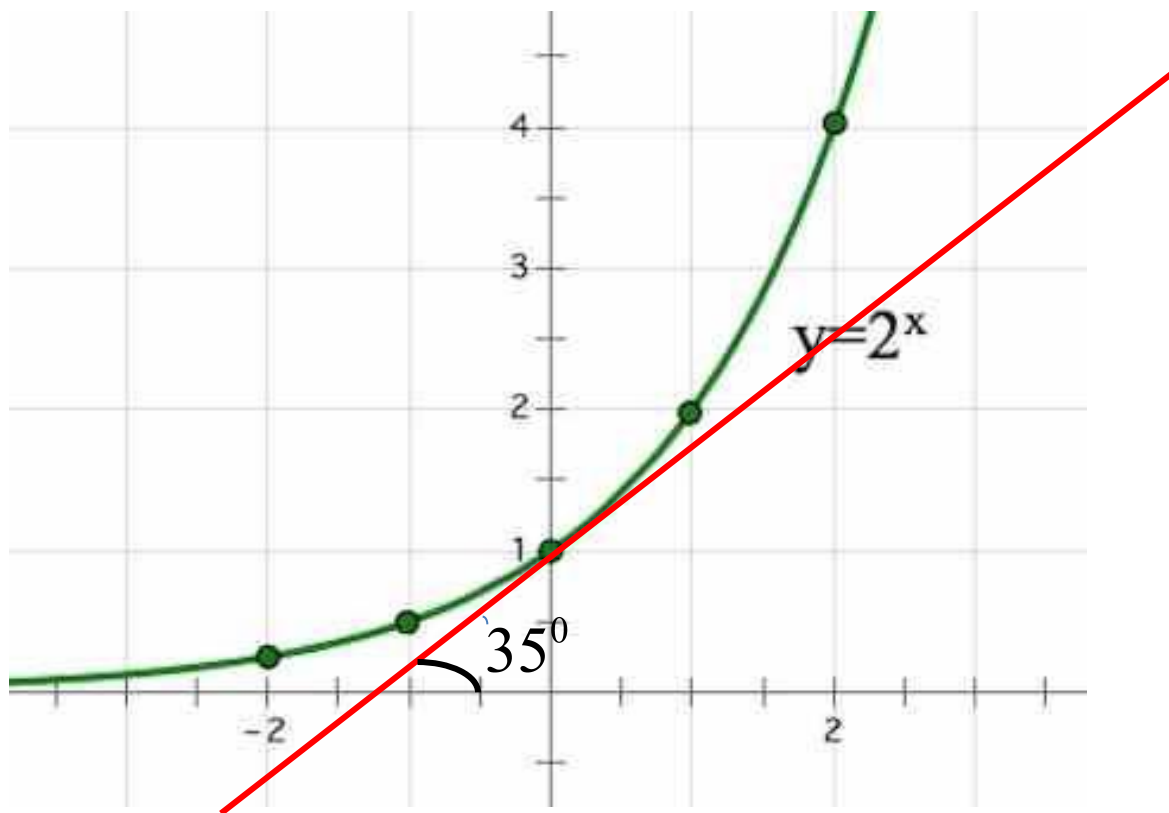
2. $y = 3^x$ (1 вариант)

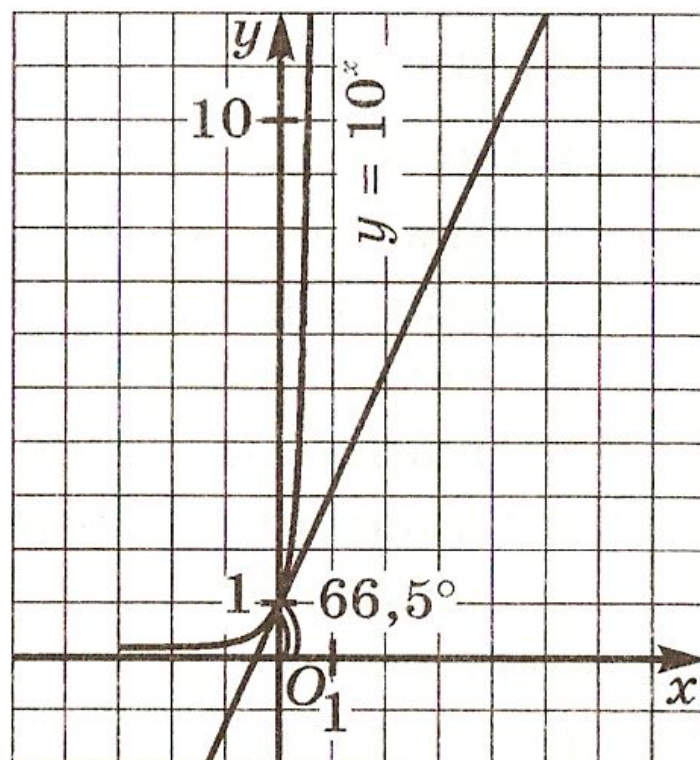
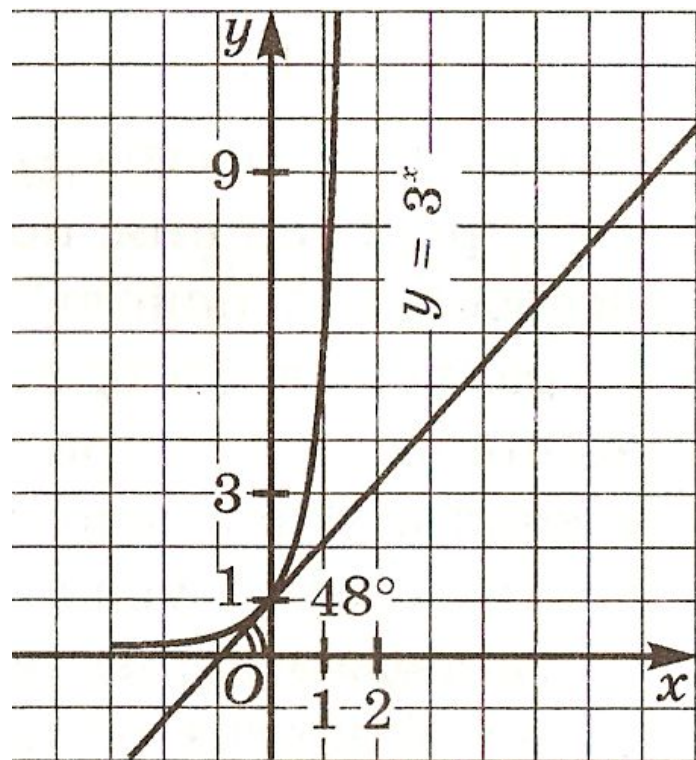
3. $y = 10^x$ (2 вариант)

- 1) Все графики проходят через точку $(0 ; 1)$;
- 2) Все графики имеют горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$;
- 3) Все они обращены выпуклостью вниз;
- 4) Все они имеют касательные во всех своих точках.



Проведем касательную к графику функции $y = 2^x$ в точке $x = 0$ и измерим угол, который образует касательная с осью x





С помощью точных построений касательных к графикам можно заметить, что если основание a показательной функции $y = a^x$ постепенно увеличивается основание от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке $x = 0$ и осью абсцисс постепенно увеличивается от $35'$ до $66,5'$.

Следовательно существует основание a , для которого соответствующий угол равен $45'$. И это значение a заключено между 2 и 3, т.к. при $a = 2$ угол равен $35'$, при $a = 3$ он равен $48'$.

В курсе математического анализа доказано, что данное основание существует, его принято обозначать буквой e .

Установлено, что e – иррациональное число, т. е. представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь:

$$e = 2, 7182818284590... ;$$

На практике обычно полагают, что $e \approx 2,7$.

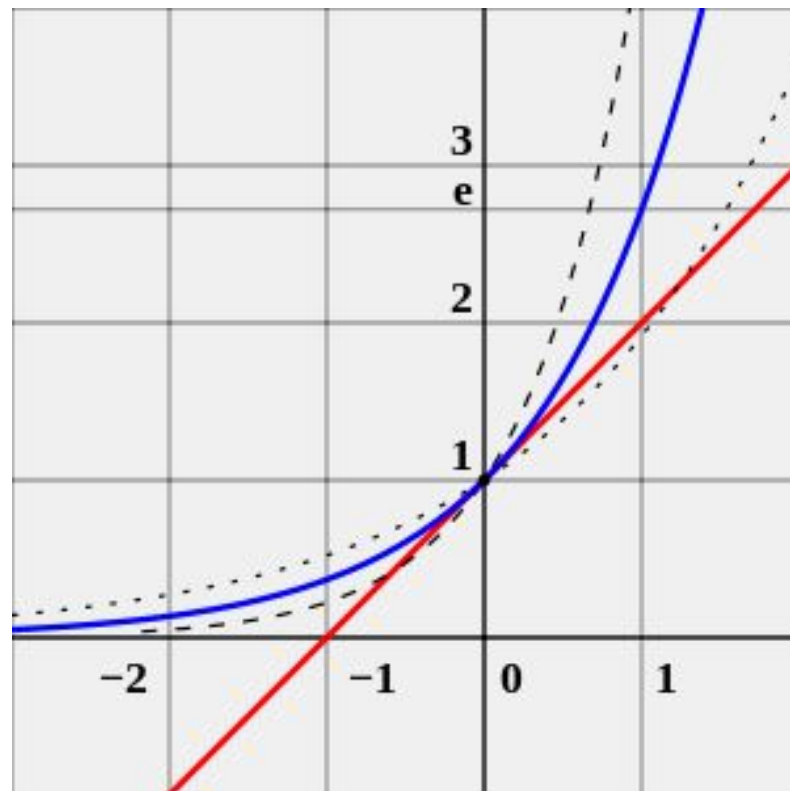
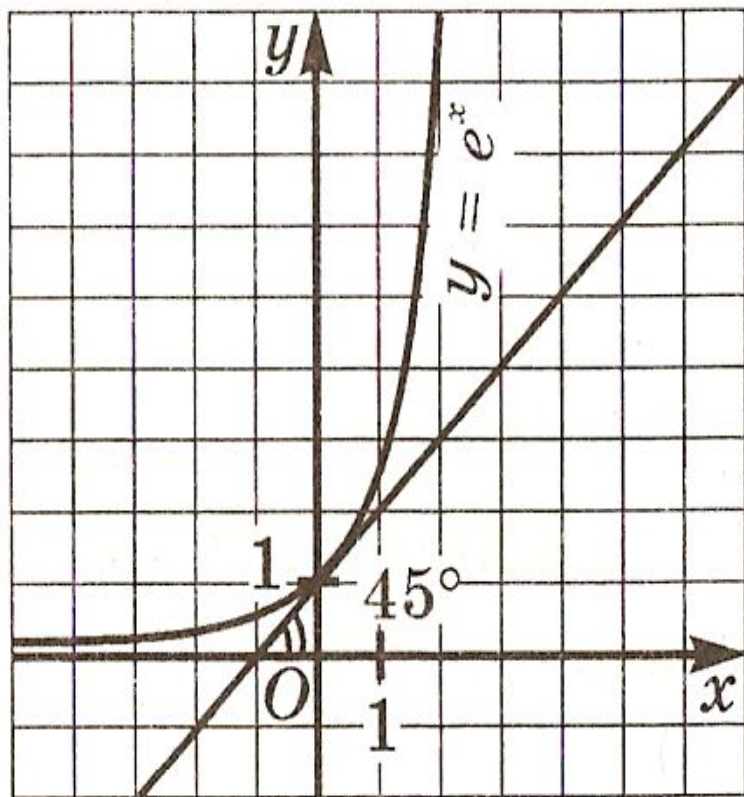
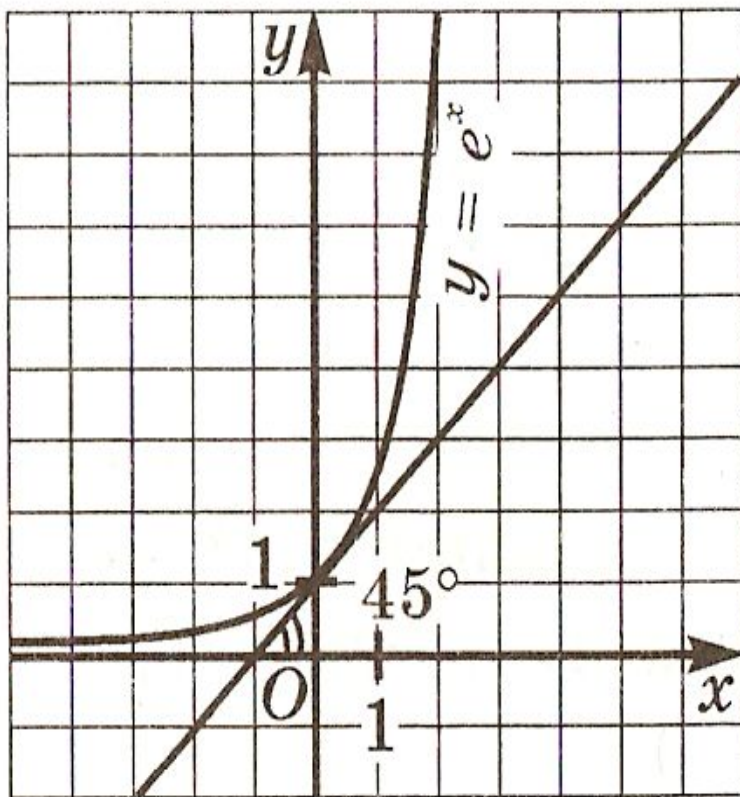


График и свойства функции $y = e^x$:



- 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- 2) не является ни четной, ни нечетной;
- 3) возрастает;
- 4) не ограничена сверху, ограничена снизу
- 5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
- 6) непрерывна;
- 7) $E(f) = (0; +\infty)$;
- 8) выпукла вниз;
- 9) дифференцируема.

Функцию $y = e^x$ называют **экспонентой**.

В курсе математического анализа доказано, что функция $y = e^x$ имеет производную в любой точке x :

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{5x})' = 5e^{5x}$$

$$(e^{x-3})' = e^{x-3}$$

$$(e^{-4x+1})' = -4e^{-4x+1}$$

Пример 1.

Вычислить значение производной функции $y = e^{4x-12}$ в точке $x = 3$.

Решение:

$$y' = (e^{4x-12})' = 4e^{4x-12}$$

$$y'(3) = (e^{4 \cdot 3 - 12})' = 4e^0 = 4$$

Ответ: 4

Пример 2.

Исследовать на экстремум функцию $y = x^2 e^x$

Решение:

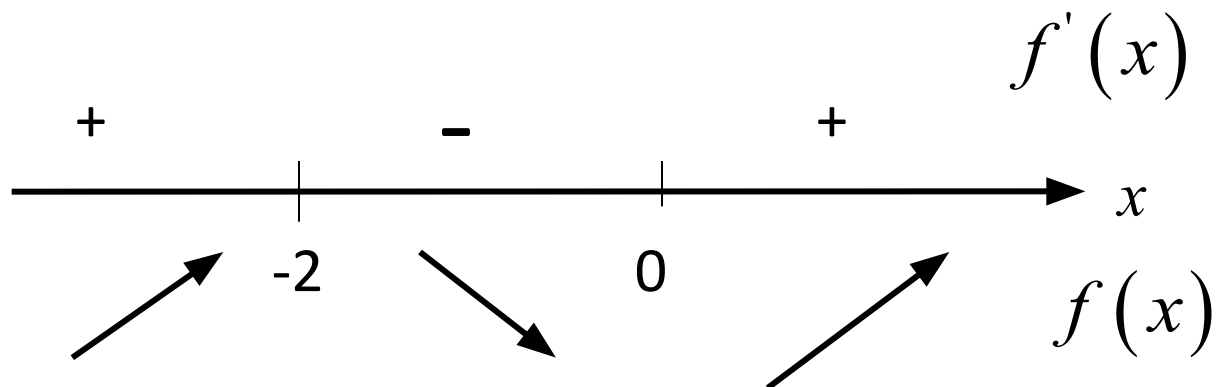
$$\begin{aligned} 1) \quad y' &= (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = \\ &= 2xe^x + x^2 e^x = xe^x (x + 2); \end{aligned}$$

$$2) \quad y' = 0; \quad \text{или} \quad x(x + 2) = 0;$$

$$xe^x (x + 2) = 0;$$

$$x=0 \quad \text{и} \quad x=-2$$

$$3) y' = xe^x (x + 2);$$



4) $x = -2$ — точка максимума

$$y_{\max} = y(-2) = (-2)^2 e^{-2} = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,5$$

$x = 0$ — точка минимума

$$y_{\min} = (0)^2 e^0 = 0$$

Ответ: $y_{\min} = 0; \quad y_{\max} = \frac{4}{e^2}.$

Натуральные логарифмы.

Функция $y = \ln x$, её свойства,
график, дифференцирование

Если основанием логарифма служит число e , то говорят, что задан **натуральный логарифм**. Для натуральных логарифмов введено специальное обозначение **$\ln$** (l – логарифм, n – натуральный).

$$\ln x = \log_e x$$

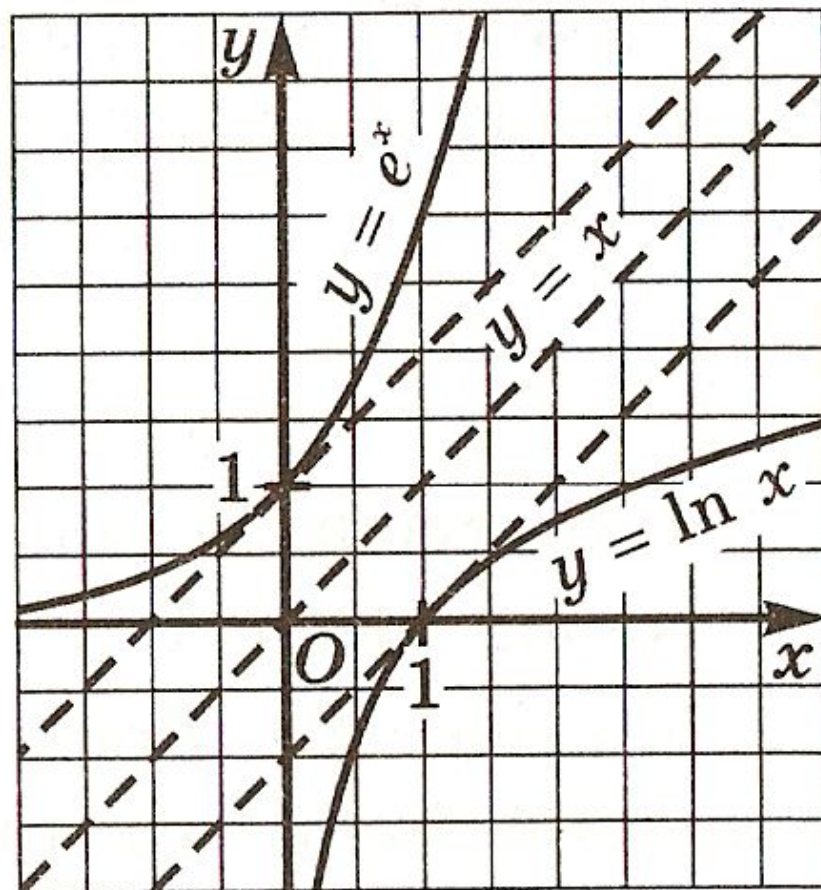
$$\log_e 2 = \ln 2$$

$$\log_e 7 = \ln 7$$

График и свойства функции $y = \ln x$

Свойства функции $y = \ln x$:

- 1) $D(f) = (0; +\infty)$;
- 2) не является ни четной, ни нечетной;
- 3) возрастает на $(0; +\infty)$;
- 4) не ограничена;
- 5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- 6) непрерывна;
- 7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
- 8) выпукла вверх;
- 9) дифференцируема.



В курсе математического анализа доказано, что для любого значения $x > 0$ справедлива формула дифференцирования

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Пример 3:

Вычислить значение производной функции $y = \ln(3x + 5)$ в точке $x = -1$.

Решение:

$$y' = \left(\ln(3x + 5) \right)' = 3 \cdot \frac{1}{3x + 5} = \frac{3}{3x + 5};$$

$$f'(-1) = \frac{3}{3 \cdot (-1) + 5} = 1,5.$$

Ответ: 1,5

Дифференцирование функции

$$y = a^x$$

$$a = e^{\ln a}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Например: $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2; \quad (4^{x+5})' = 4^{x+5} \cdot \ln 4.$

$$(5^{-3x})' = -3 \cdot 5^{-3x} \cdot \ln 5.$$

Дифференцирование функции

$$y = \log_a x$$

$$\begin{aligned} y' &= (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \\ &= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$