Классификация квадратных уравнений и уравнений, приводимых к квадратным

учитель математики
ГБОУ Лицей
«МКШ им. В.Н. Челомея»
города Байконур
Калиева У.А.

Квадратное уравнение

Квадратным называют алгебраическое уравнение 2-ой степени, т.е. уравнение вида

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. (1)

Основные способы решения квадратных уравнений

- с помощью дискриминанта
- с помощью теоремы Виета
- графический способ
- разложение на множители
- по коэффициентам
- выделением квадрата двучлена

Решение

Решим квадратное уравнение $x^2 - 5x + 4 = 0$

С помощью дискриминанта

$D = b^2 - 4ac$

$D = 5^2 - 4*4*1 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2} = 1$$

$$Ответ: x \in \{1; 4\}$$

Решение

Решим с помощью теоремы Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \times x_2 = c \end{cases}$$

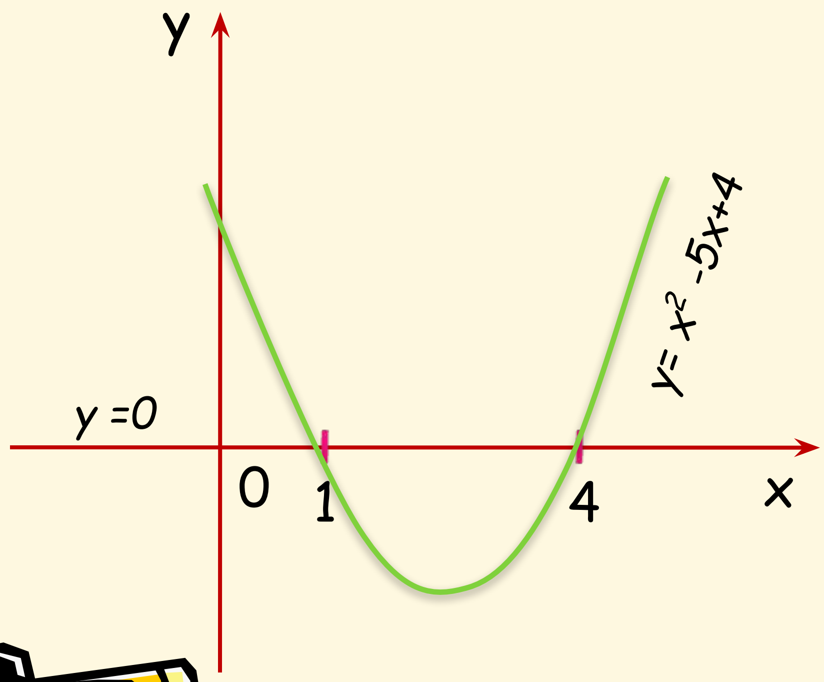
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \times x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1.$$

$$Ответ: x \in \{1;4\}$$

Решение

Решим уравнение $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Графическим способом.



Решение

Решим уравнение разложением на множители:

$$x^2-5x+4=0$$

$$x^2-x-4x+4=0$$

$$x(x-1)-4(x-1)=0$$

$$(x-1)\cdot(x-4)=0$$

$$(x-1)=0\,или\,(x-4)=0$$

$$x_1=1, x_2=4.$$

$$Ответ: x_1=1, x_2=4$$

Решение

Решим это уравнение по коэффициентам:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Если a+b+c=0, то

$$x_1 = 1, x_2 = c$$

$$1 - 5 + 4 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 4.$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

Если a-b+c=0, то

$$x_1 = -1, x_2 = -c$$

$$1 - 5 + 4 = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = -4$$

Решение

Решим уравнение выделением квадрата двучлена:

$$x^2-5x+4=0$$

$$\left(x^2-2\cdot 2{,}5x+6{,}25\right)-2{,}25=0$$

$$\left(x-2{,}5\right)^2-2{,}25=0$$

$$\left(x-2{,}5\right)^2=1{,}5^2$$

$x-2{,}5=1{,}5$ или $x-2{,}5=-1{,}5$

x=4 x=1

Уравнения приводящиеся к квадратным

- Биквадратные
- Симметричные
- Однородные
- Возвратные или обобщенно-симметрические
- Логарифмические
- Показательные
- Тригонометрические

Уравнения приводящиеся к квадратным

1.Биквадратное уравнение

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

сводится к квадратному заменой ***x²*** переменной ***y***.

Уравнения приводящиеся к квадратным

3.Уравнение $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right)$

сводится к квадратному уравнению заменой $y=\frac{x}{3}+\frac{4}{x}$

здесь $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=3\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right)^2-8;$

$3y^2-10y-8=0;$

$y_1=-\frac{2}{3},y_2=4$

Из уравнений

$\frac{x}{3}+\frac{4}{x}=-\frac{2}{3}$ и $\frac{x}{3}+\frac{4}{x}=4$

корни имеет только второе :

$x=2\left(3\pm\sqrt{6}\right)$

Уравнения приводящиеся к квадратным

4.Вообще, замена $y = x + k/x$ – одна из наиболее часто встречающихся. Например, с помощью такой замены к квадратному уравнению (после деления обеих частей уравнения на x^2) сводится уравнение вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0\ .$$

Уравнение этого вида обычно называют возвратным или обобщенно-симметрическим.

Уравнения приводящиеся к квадратным

6. Уравнение

$$x^4+(x+2)^4=82$$

«симметричное» относительно $x+1$,сводится к биквадратному уравнению $y^4+6y^2=40$ заменой $y=x+1$;

аналогично уравнение , $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=40$

«симметричное» относительно $x+3$, сводится к биквадратному уравнению $(y^2-1)(y^2-4)=40$ заменой $y=x+3$.

Отметим ,что для второго уравнения годится и замена

$y=x^2+6x$, тогда $(x+1)(x+5)=y+5;(x+2)(x+4)=y+8$.

Основные способы решения уравнений приводящихся к квадратным уравнениям

- Замена переменной
- Разложением на множители
- Доведением до полного квадрата
- С помощью теоремы Безу
- С помощью схемы Горнера

Решение квадратных уравнений и приводящихся к ним.

$x^4 + 4x^2 - 21 = 0$ – биквадратное уравнение.

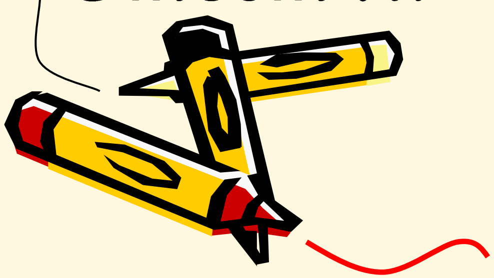
Пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$, тогда получим уравнение $t^2 - 4t - 21 = 0$.

По обратной теореме Виета $t_1 = -7$, $t_2 = 3$.

$t = -7$ — не удовлетворяет условию $t \geq 0$, поэтому решим уравнение:

$$x^2 = 3, x = \pm\sqrt{3}$$

$$Ответ: x = \pm\sqrt{3}$$



Решение квадратных уравнений и приводящихся к ним.

$$x^4+5\times x^2(x+1)=6(x+1)^2$$

Однородное уравнение относительно x^2 и $(x+1)$.

Разделим обе части уравнения на $(x+1)^2$ и получим:

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)+5\cdot\left(\frac{x^2}{x+1}\right)-6=0$$

Пусть $\frac{x^2}{x+1}=t$, тогда $t^2+5t-6=0; t=-6, t=1.$

Для нахождения x решаем совокупность уравнений:

1) $\frac{x^2}{x+1}=-6,$

$$\frac{x^2+6x+6}{x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+6=0, \\ x+1\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2}=3\pm\sqrt{3} \\ x\neq -1 \end{cases} \Rightarrow x_{1,2}=3\pm\sqrt{3}$$

2) $\frac{x^2}{x+1}=1,$

$$\frac{x^2-x-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1=0, \\ x+1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x\neq -1 \end{cases} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\mathit{Ответ}: x_{1,2}=3\pm\sqrt{3}, x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Решение квадратных уравнений и приводящихся к ним.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{3}{2}$$

ОДЗ: $x\neq 0, x\neq -1.$

Пусть $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=t, t>0$, тогда $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{1}{t}$ и уравнение примет вид

$$t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2}$$

$$2t^2-3t-2=0$$

$t_1=2, t_2=-\frac{1}{2}$ - не удовлетворяет условию t>0.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=2,$$

откуда $\left|\frac{x}{x+1}\right|=\sqrt{2}$

или $\frac{x}{x+1}=-\sqrt{2}$ и $\frac{x}{x+1}=\sqrt{2}$

Решая полученные уравнения, находим $x_1=-2-\sqrt{2}, x_2=-2+\sqrt{2}.$

$$Ответ: x_1=-2-\sqrt{2}, x_2=-2+\sqrt{2}.$$

Решение квадратных уравнений и приводящихся к ним.

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=6$$

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=\left(\sqrt{9-8}\right)^x=1$$

$$\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=\frac{1}{\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x}$$

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x=t$$

$$t^2-6t+1=0$$

$$t_{1,2}=3\pm2\sqrt{2}$$

Ответ: $x=\pm2$

Решение квадратных уравнений и приводящихся к ним.

$$2^{3x^2-x}+2^{2x^2}=2^{x^2+x+1}$$

$$2^{2x^2-2x-1}+2^{x^2-x-1}-1=0$$

$$2^{2(x^2-x)}+2^{x^2-x}-2=0$$

$$a=2^{x^2-x}$$

$$a^2+a-2=0$$

$$a=1$$

Ответ: $x=0,1$

Решение квадратных уравнений и приводящихся к ним.

$$\log_{3-4x^2}(9-16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3-4x^2)}$$

ОДЗ: $\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

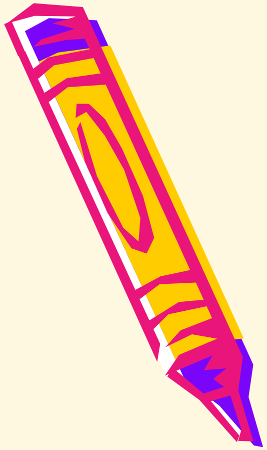
$$\log_{3-4x^2}(3+4x^2) = 1 + \log_{3-4x^2} 2$$

$$3+4x^2 = 2(3-4x^2)$$

$$4x^2 = 1$$

$$|x| = \frac{1}{2}$$

Ответ: $x = \pm\frac{1}{2}$



СПАСИБО
ЗА
ВНИМАНИЕ!