



Однородные тригонометрические уравнения.



Познакомимся с тригонометрическими уравнениями специального вида, довольно часто встречающиеся на практике.

Определение

- Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$ называют **однородным** тригонометрическим уравнением **первой степени**.
- Уравнения вида $a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = 0$ называют **однородным** тригонометрическим уравнением **второй степени**.

Сначала поговорим о решении однородных тригонометрических уравнений первой степени, причем рассмотрим только самый общий случай, когда оба коэффициента a и b отличны от нуля, так как, если $a = 0$, то уравнение принимает вид $b \cos x = 0$, а получившееся уравнение $\cos x = 0$ отдельного обсуждения не заслуживает; аналогично при $b = 0$ получаем $\sin x = 0$, что тоже не требует отдельного обсуждения.

Итак, дано уравнение **$a\sin x + b\cos x = 0$** , где **$a \neq 0$, $b \neq 0$** .

Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим:

$$a\sin x / \cos x + b\cos x / \cos x = 0 / \cos x$$

$$a\operatorname{tg}x + b = 0$$

В итоге приходим к простейшему тригонометрическому уравнению:

$$\operatorname{tg}x = -b/a$$

Но внимание! Вообще-то, делить обе части уравнения на одно и то же выражение можно только в том случае, когда мы уверены, что это выражение нигде не обращается в нуль, потому что на нуль делить нельзя. Уверены ли мы, что в рассматриваемом случае $\cos x$ отличен от нуля? Давайте проанализируем. Предположим, что $\cos x = 0$. Тогда однородное уравнение $a \sin x + b \cos x = 0$ примет вид $a \sin x = 0$, то есть $\sin x = 0$ (коэффициент a не равен нулю по условию). Получается, что и $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ обращаются в нуль в различных точках.

Итак, в однородном тригонометрическом уравнении первой степени деление обеих частей уравнения на $\cos x$ – вполне благополучная операция.



Уравнение вида **$asinx+bcosmx=0$** тоже называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени.

Для их решения обе части уравнения делят почленно на **$cosmx$** .

Примеры

- №1. *Решить уравнение*

$$2\sin x - 3\cos x = 0.$$

Решение.

Разделив обе части уравнения почленно на **cos x**, получим:

$$2\operatorname{tg} x - 3 = 0;$$

№2. Решить уравнение

$$\sin(2\pi - 2x) = \cos(2x - \pi/2).$$

Решение.

Разделив обе части уравнения почленно на $\cos 2x$, получим:

$$\operatorname{tg} 2x - 1 = 0;$$

Рассмотрим теперь однородное тригонометрическое уравнение второй степени

$$a\sin^2x + b\sin x \cos x + c\cos^2x = 0.$$

Если коэффициент **a** отличен от нуля, то есть в уравнение содержится член \sin^2x с каким-то коэффициентом, отличным от нуля, то, рассуждая, как и выше, нетрудно убедиться в том, что при интересующих нас значениях переменной $\cos x$ не обращается в нуль, а потому можно обе части уравнения разделить почленно на \cos^2x .

$$a\sin^2x/\cos^2x + b\sin x \cos x/\cos^2x + c\cos^2x/\cos^2x = 0/\cos^2x;$$

$$atg^2x + btgx + c = 0$$

Это квадратное уравнение относительно новой переменной $t = tgx$.

Пусть теперь в однородном тригонометрическом уравнении $a\sin^2x + b\sin x \cos x + c\cos^2x = 0$ коэффициент $a=0$, то есть отсутствует член $a\sin^2x$. Тогда уравнение принимает вид $b\sin x \cos x = 0$. Это уравнение можно решить методом разложения на множители:

$$\cos x (b \sin x + c \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad b \sin x + c \cos x = 0$$

Получились два уравнения, которые мы умеем решать.

Аналогично обстоит дело и в случае, когда $c=0$, то есть когда однородное уравнение принимает вид $a\sin^2x + b\sin x \cos x = 0$ (здесь можно вынести за скобки $\sin x$).

Фактически мы выработали алгоритм решения однородных тригонометрических уравнений второй степени.

Алгоритм решения однородных тригонометрических уравнений второй степени.

- *Посмотреть, есть ли в уравнении $a\sin^2x$;*
- *Если $a\sin^2x$ содержится в уравнении, то есть $a \neq 0$, то уравнение решается делением обеих его частей на \cos^2x и последующим введением новой переменной $t = \operatorname{tg}x$;*
- *Если $a\sin^2x$ не содержится в уравнении, то есть $a=0$, то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносятся $\cos x$;*

Так же обстоит дело и в однородном тригонометрическом уравнении второй степени вида

$$a\sin^2 mx + b\sin mx \cos mx + c\cos^2 mx = 0.$$

Примеры

- №1. Решить уравнение $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Решение.

$$\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0 ; | \div \cos^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

- №2. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

Решение. $\cos x(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0$