

Интеграл и первообразная. Теорема Ньютона-Лейбница.



ПОДГОТОВИЛА: ПРЕПОДАВАТЕЛЬ
ГБПОУ «ЧГПУТ ИМ.А.В.ЯКОВЛЕВА»
ПИЛИПЕНКО Е.Б.

Понятие первообразной



- Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$.
- Операцию нахождения первообразной называют интегрированием.

Основное свойство первообразных:



- общий вид первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I есть
$$F(x)+C,$$
- где C - произвольная постоянная, а $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I .

Понятие неопределенного интеграла



- Неопределенным интегралом $\int f(x)dx$ называется функция $F(x)+C$, содержащая произвольное постоянное C , дифференциал которой равен подинтегральному выражению $f(x)dx$.
- Определенный интеграл – это разность значений любой первообразной функции для $f(x)$ при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

где

- $\int$ - знак интеграла,
- $f(x)dx$ -подынтегральное выражение,
- x -переменная интегрирования,
- a и b – пределы интегрирования,
- $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Свойства определенного интеграла



- 1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла.
- 2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.
- 3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- 4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых.
- 5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Пример 1.

● Вычислить :

$$\int_2^3 3x^2 dx$$

● Решение:

● Применяя формулу Ньютона-Лейбница и свойства определенного интеграла, получим

$$\int_2^3 3x^2 dx = 3 \int_2^3 x^2 dx = x^3 \Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 19$$

● Ответ: 19.

Пример 2.



- Дано уравнение скорости движения тела
- Найти уравнение пути, если тело за первые 3 с прошло путь 24 м.
- Решение:
- Уравнение пути $s(t)$ находится интегрированием:

$$u = t^2 - 4t + 1 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$$

$$u = \frac{dS}{dt} \Rightarrow S(t) = \int dS = \int u \cdot dt$$
$$S(t) = \int u \, dt$$

$$S(t) = \int (t^2 - 4t + 1) dt = \int t^2 dt - 4 \int t dt + \int dt = \frac{t^3}{3} - 4 \frac{t^2}{2} + t + C$$

продолжение

$$S(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + t + C.$$

- Найдите значения C из граничных условий при $t=3$ с, $S=24$ м:

$$\Rightarrow C = 30$$

- $24 = 9 - 18 + 3 + C.$

- Ответ: уравнение пути имеет вид:

$$S(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + t + 30 \text{ (м)}.$$

Пример 3

- Найти $\int e^{-2x} dx$
- если при $x=0$ первообразная функции равна 5,5.
- Решение:

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C.$$

- Найдем C исходя из условий задачи при $x=0$ и $F(x)=5,5$:

$$5,5 = -\frac{1}{2} e^0 + C \Rightarrow C = 6.$$

- Ответ: $-\frac{1}{2} e^{-2x} + 6.$