

ПРОСТЕЙШИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Показательные уравнения

```
graph TD; A[Показательные уравнения] --> B[Определение]; A --> C[Способы решения сложных уравнений]; A --> D[Простейшие уравнения];
```

Определение

Простейшие
уравнения

Способы решения
сложных уравнений

* Определение

Уравнение, в котором
переменная содержится в
показателе степени,
называется показательным.

Примеры: $2^x = 8$; $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

Простейшее показательное уравнение – это уравнение вида

$$a^x = a^b, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

Простейшее показательное уравнение решается с использованием свойств степени.

$$a^x = a^b \Leftrightarrow x = b$$

Способы решения сложных показательных уравнений.

```
graph TD; A[Способы решения сложных показательных уравнений.] --> B[Замена  
переменной]; A --> C[Деление на  
показательную  
функцию]; A --> D[Вынесение  
за скобки  
степени с  
меньшим  
показателем];
```

Замена
переменной

Деление на
показательную
функцию

Вынесение
за скобки
степени с
меньшим
показателем

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

Данный способ используется,
если соблюдаются два условия:

- 1) основания степеней
одинаковы;
- 2) коэффициенты перед
переменной одинаковы

Например: $2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$$

$$2^{x-2} (2^3 - 4 \cdot 1) = 32$$

$$2^{x-2} (8 - 4) = 32$$

$$2^{x-2} \cdot 4 = 32 | :4$$

$$2^{x-2} = 8$$

$$2^{x-2} = 2^3$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

Ответ: 5

$$x + 1 - (x - 2) =$$

$$= x + 1 - x + 2 = 3$$

Замена переменной

При данном способе показательное уравнение сводится к квадратному.

Способ замены переменной используют, если

- а) основания степеней одинаковы;
- б) показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем у другой.

Например:

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

коэффициенты перед переменной противоположны.

Например:

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$$

Замена переменной (1)

основания степеней одинаковы, показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем у другой .

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

$$t = 3^x (t > 0)$$

$$t^2 - 4t - 45 = 0$$

$$\text{По т. Виета: } t_1 \cdot t_2 = -45; t_1 + t_2 = 4$$

$$t_1 = 9; t_2 = -5 \text{ — не удовлетворяет условию}$$

$$3^x = 9; 3^x = 3^2; x = 2.$$

Ответ: 2

Замена переменной (2)

Основания степеней одинаковы,
коэффициенты перед переменной противоположны.

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$$

$$2^2 \cdot 2^{-x} - 2^x \cdot 2^{-1} = 1$$

$$t = 2^x \quad (t > 0)$$

$$\frac{4}{t} - \frac{t}{2} = 1$$

$$8 - t^2 = 2t$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

По т. Виета:

$$t_1 \cdot t_2 = -8, \quad t_1 + t_2 = -2$$

$$t_1 = -4 \quad \text{- Не удовлетворяет условию}$$

$$t_2 = 2$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

Ответ: 1

Деление на показательную функцию

Данный способ используется, если основания степеней разные.

а) в уравнении вида $a^x = b^x$ делим на b^x

Например: $2^x = 5^x \mid : 5^x$

б) в уравнении $A a^{2x} + B (ab)^x + C b^{2x} = 0$ делим на b^{2x} .

Например:

$$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \mid : 9^x$$

Деление на показательную функцию

$$a) 2^x = 5^x | : 5^x$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x = 0$$

Ответ: 0

Деление на показательную функцию

$$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \quad | :9^x$$

$$\frac{3 \cdot 5^{2x}}{3^{2x}} - \frac{8 \cdot 5^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + 5 = 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 5 = 0$$

$$t = \left(\frac{5}{3}\right)^x \quad (t > 0)$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 = 2^2$$

$$t_1 = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}; \quad t_2 = \frac{8-2}{6} = 1.$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{5}{3}$$

$$x = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^0$$

$$x = 0$$

Ответ: 0; 1.