

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

*Автор: Чекушкина Галина Викторовна,
учитель математики МОУ
Новоалгашиинская СОШ*

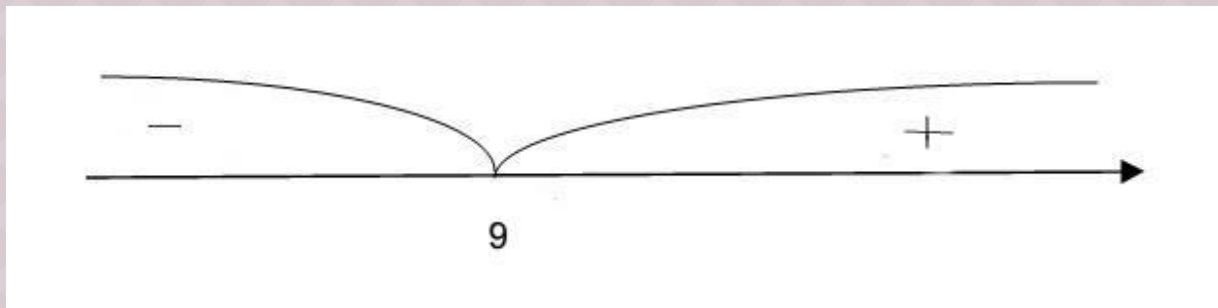
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

- Находим область определения функции
- Нули функции, которые разбивают область определения на несколько промежутков, внутри каждого из которых функция определена, непрерывна и сохраняет знак.
- Для определения знака функции на конкретном промежутке находим знак в любой удобной точке этого промежутка.
- Иллюстрацию изменения знаков функции осуществляют с помощью координатной прямой.

І. Примеры решения иррациональных неравенств.

Пример 1. $\sqrt{x} \leq 3$

Введем функцию $f(x) = \sqrt{x} - 3$. Необходимо определить промежутки, на которых $f(x) \leq 0$. Очевидно, что $D(f) = [0; \infty)$. Нули функции:
 $x = 9$.



$$f(16) > 0, f(4) < 0.$$

Ответ запишем, учитывая область определения функции. Ответ: $[0; 9]$

Пример 2. $\sqrt{x + 18} < 2 - x$

Традиционное решение неравенства сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 0 \leq x + 18 < (2 - x)^2 \end{cases}$$

Решая систему, получим $-18 \leq x < -2$

Графическое решение неравенства $\sqrt{x+18} < 2-x$

Если заметить, что $f(x) = \sqrt{x+18}$

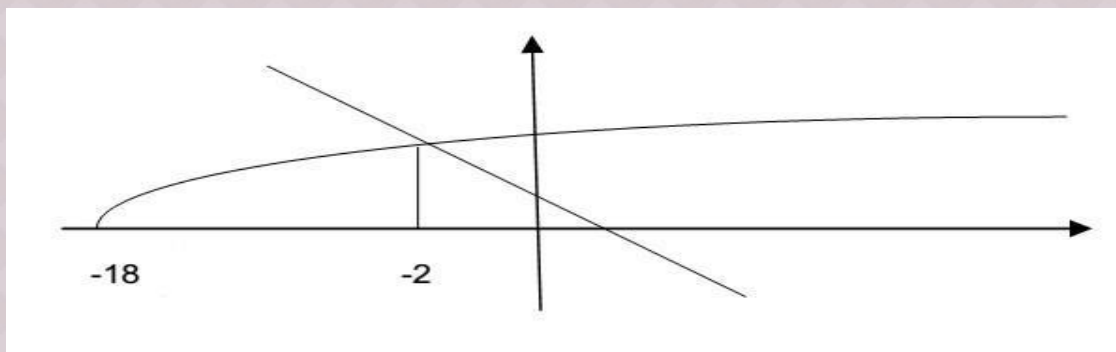
функция возрастающая на луче $[-18; \infty)$,

$g(x) = 2 - x$ — убывающая на $\mathbf{R}$,

$x = -2$ — абсцисса их точки пересечения,

то ответ $[-18; -2)$.

Схематическое построение графиков даёт наглядный ответ



Решение методом интервалов

$$\sqrt{x+18} < 2-x$$

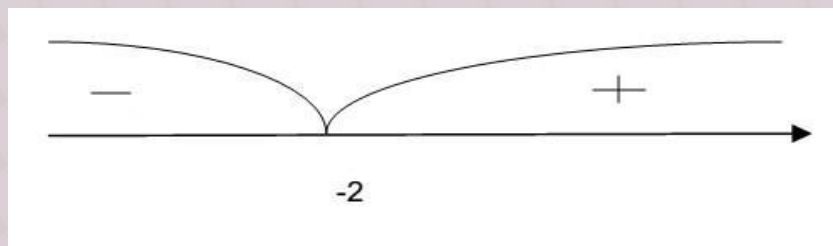
Пусть $f(x) = \sqrt{x+18} + x - 2$

Решим неравенство $f(x) < 0$

$$D(f) = [-18; \infty)$$

Нули функции найдем, решив уравнение

$$\sqrt{x+18} = 2-x \quad x = -2$$



Ответ запишем, учитывая область определения функции. Ответ: $[-18; -2)$.

Пример 3 $\sqrt{21x + 16} - \sqrt{x - 4} < 20$

Область допустимых значений определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 21x + 16 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 4$$

Для функции

$$f(x) = \sqrt{21x + 16} - \sqrt{x - 4} - 20 \quad D(f) = [4; \infty).$$

Далее находим нули функции

$$\sqrt{21x + 16} = \sqrt{x - 4} + 20$$

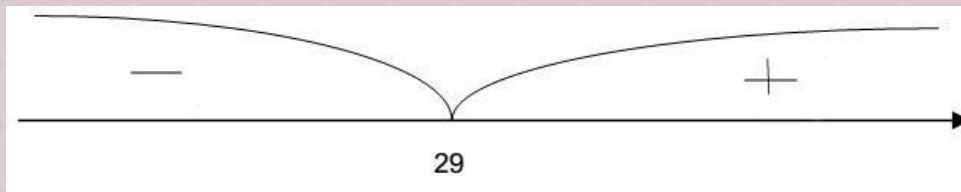
$$21x+16 = 400 + 40\sqrt{x-4} + x - 4,$$

$$x - 19 = 2\sqrt{x-4} \quad (x \geq 19),$$

$$x^2 - 38x + 361 = 4x - 16,$$

$$x^2 - 42x + 377 = 0$$

откуда $x=29$ и $x=13$ - посторонний корень.



Ответ запишем, учитывая область определения функции. Ответ: $[4; 29)$

II. Примеры решения показательных неравенств

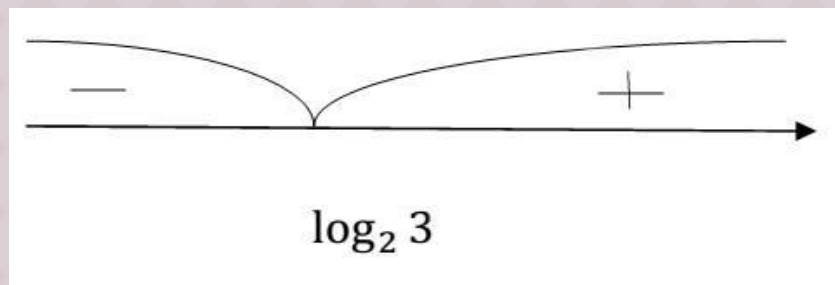
Пример 1. $4^x < 2^{x+1} + 3$

Если $f(x) = 4^x - 2 \cdot 2^x - 3$, то $D(f) = \mathbf{R}$

и необходимо решить неравенство $f(x) < 0$

Найдем нули функции $4^x - 2 \cdot 2^x - 3 = 0$,

откуда $2^x = 3$, $x = \log_2 3$.



Ответ: $(-\infty; \log_2 3)$

Пример 2.

$$4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$$

Решаем неравенство $f(x) \leq 0$

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$$

Для нахождения нулей функции

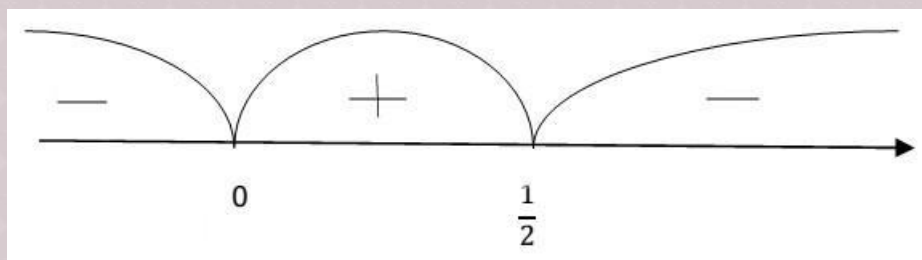
решаем уравнение $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 = 0$

Полагая $2^{\frac{1}{x}-1}=t$, где $t>0$,

приходим к уравнению $t^2 - \frac{1}{2}t - 3 = 0$

с положительным корнем $t=2$.

Следовательно, $2^{\frac{1}{x}-1}=2$ и $x=\frac{1}{2}$.



Ответ: $(-\infty; 0) \cup [\frac{1}{2}; \infty)$

III. Примеры решения логарифмических неравенств методом интервалов

Пример 1 $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \leq 0$

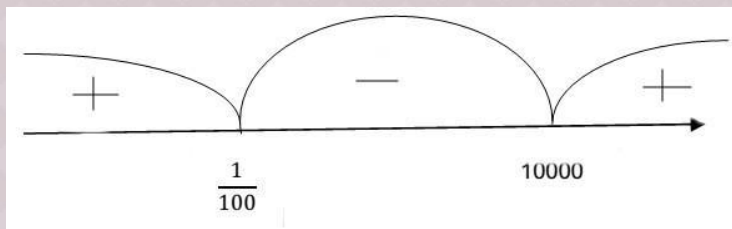
$$f(x) = \lg^2 x - 2\lg x - 8, D(f) = (0; \infty)$$

Для нахождения нулей функции решим уравнение

$$\lg^2 x - 2\lg x - 8 = 0, \text{ откуда}$$

$$\lg x = -2, \lg x = 4,$$

$$x = \frac{1}{100}, x = 10000$$



$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{100}; 10000\right)$$

Пример 2

$$\log_{0,3}(x^2-x-20) - \log_{0,3}(x+4) > 0$$

Найдем область определения функции f

в левой части неравенства, решив систему неравенств

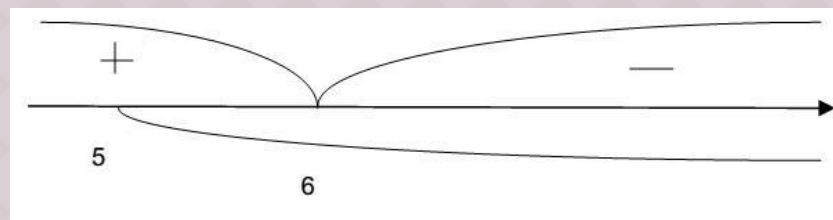
$$\begin{cases} (x-5)(x+4) > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 5$$

Решая уравнение $\log_{0,3}(x^2 - x - 20) - \log_{0,3}(x + 4) = 0$,
находим нули функции f

$$x^2 - x - 20 = x + 4$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0,$$

$x = -4$ - посторонний корень и $x = 6$



Ответ: (5;6)

IV. Примеры на применение метода интервалов к неравенствам, содержащим знак модуля

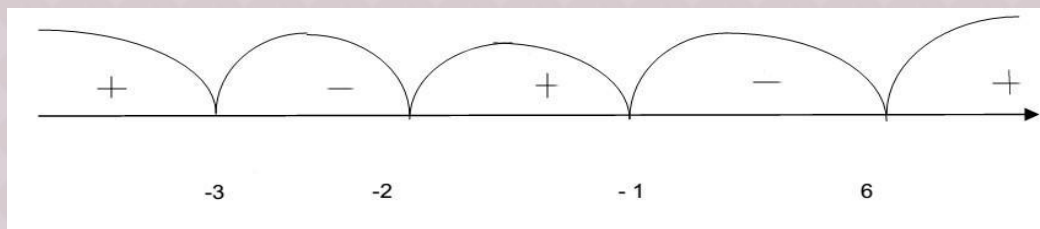
Пример 1

$$x^2 > |5x + 6|$$

Функция $f(x) = x^2 - |5x + 6|$ определена при любом x

Найдем её нули, решив уравнение $x^2 = |5x + 6|$,
откуда $x^2 = 5x + 6$ или $x^2 = -(5x + 6)$,
 $x^2 - 5x - 6 = 0$ или $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Корни этих уравнений $-1, 6, -2, -3$.



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (6; +\infty)$

Пример 2

$$y^2 - 4 | y| < 12$$

Положим $f(y)=y^2 - 4 | y| - 12$.

Заметим, что $D(y)=\mathbf{R}$ и

найдем нули функции $y^2 - 4 | y| - 12=0$,

откуда $| y|=6$, $| y|= - 2$,

последнее уравнение корней не имеет.

Ответ: $-6 < y < 6$

Реши методом интервалов

1. $\sqrt{6x+1} - \sqrt{x-3} \geq \sqrt{3x+4}$ Ответ: $[3; 4]$

2. $9^x < 3^x + 2$ Ответ: $(-\infty; \log_3 2)$

3. $\sqrt{\log_{10} x} + \sqrt{25 - \log_{10} x} \leq 7$ Ответ: $[1; 10^9] \cup [10^{16}; 10^{25}]$

4. $|x-6| > x^2 - 5x + 9$ Ответ: $(1; 3)$