

Методы решения иррациональных уравнений и неравенств

подготовила
студентка 5 курса
Бородинова Е. А.
руководитель:
старший преподаватель
Беданок Ш.Д.

Методы решения иррациональных уравнений:

- метод возведения обеих частей уравнения в квадрат
- метод подстановки (замены переменной)
- метод монотонных функций
- метод сведения к эквивалентным системам рациональных уравнений
- умножение обеих частей уравнения на функцию
- графический метод

**Пример.* Решить уравнение $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$.

Решение: Составим систему равносильную данному уравнению:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 1 - \sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ -\sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ \sqrt{x^4 - x^2} = 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x^4 - x^2 = 4x^2 - 2x^3 + x^4 \\ 2x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ 5x^2 - 2x^3 = 0, \\ 2x - x^2 \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$5x^2 - 2x^3 = 0,$$

$$x^2(5 - 2x) = 0,$$

$$x^2 = 0 \quad \vee \quad 5 - 2x = 0,$$

$$x = 0 \quad \quad \quad 2x = 5,$$

$x = 2,5$ не удовлетворяет условию $2x - x^2 \geq 0$

Ответ: {0}.

Пример . Решить уравнение $\sqrt{3x^2 - 4x + 15} + \sqrt{3x^2 - 4x + 8} = 7$

Решение: В данном уравнении совпадают только первые члены подкоренного выражения.

Обозначим их за новую переменную $3x^2 - 4x = y$, получится уравнение:

$\sqrt{y + 15} + \sqrt{y + 8} = 7$. Возведем правую и левую части уравнения в квадрат, получим:

$$\begin{cases} y + 15 + 2\sqrt{y + 15}\sqrt{y + 8} + y + 8 = 49, \\ y + 15 \geq 0, \\ y + 8 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y + 15}\sqrt{y + 8} = 26 - 2y, \\ y \geq -8; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2 + 23y + 120} = 13 - y, \\ y \geq -8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 23y + 120 = 169 - 26y + y^2, \\ y \leq 13, \\ y \geq -8; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 49y = 49, \\ -8 \leq y \leq 13; \end{cases} \Leftrightarrow y = 1.$$

Вернемся к нашему обозначению.

$$3x^2 - 4x = 1,$$

$$3x^2 - 4x - 1 = 0, \text{ по теореме Виета } x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}; \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} \right\}.$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x)^2. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x)^2. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x)^2. \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x)^2. \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g(x)^2. \end{cases} \end{cases}$$

* Решить неравенство $\sqrt{\frac{9}{x^2} - 3} > 1 + \frac{3}{x}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{9}{x^2} - 3} > 1 + \frac{3}{x} &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} 1 + \frac{3}{x} \geq 0 \\ \frac{9}{x^2} - 3 > \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2 \\ 1 + \frac{3}{x} < 0 \\ \frac{9}{x^2} - 3 \geq 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \frac{x+3}{x} \geq 0 \\ \frac{9}{x^2} - 3 > 1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} \\ \frac{x+3}{x} < 0 \\ \frac{3(3-x^2)}{x^2} \geq 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} \frac{x+3}{x} \geq 0 \\ \frac{4x+6}{x} < 0 \\ \frac{x+3}{x} < 0 \\ \frac{3(3-x^2)}{x^2} \geq 0 \end{cases} \right] \end{aligned}$$

Ответ: $[-\sqrt{3}; 0)$.

Решить неравенство $\sqrt{4 - \sqrt{-x - 4}} > \sqrt{-x - 3}$.

Решение:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{4 - \sqrt{-x - 4}} > \sqrt{-x - 3} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \sqrt{-x - 4} \geq 0, \\ -x - 3 \geq 0, \\ 4 - \sqrt{-x - 4} > -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{-x - 4} \geq -4, \\ -x \geq 3, \\ -\sqrt{-x - 4} > -x - 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x - 4} \leq 4, \\ x \leq -3, \\ \sqrt{-x - 4} < x + 7, \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -x - 4 \geq 0, \\ -x - 4 \leq 16, \\ x \leq -3, \end{cases} \\ \begin{cases} -x - 4 \geq 0, \\ x + 7 \geq 0 \\ -x - 4 < x^2 + 14x + 49 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -x \geq 4, \\ -x \leq 20, \\ x \leq -3, \end{cases} \\ \begin{cases} -x \geq 4, \\ x \geq -7, \\ x^2 + 15x + 53 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -4, \\ x \geq -20, \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -3, \\ x \leq -4, \\ x \geq -7, \\ x^2 + 15x + 53 > 0. \end{cases} \end{cases} \\
 &\quad x^2 + 15x + 53 > 0, \\
 &\quad x^2 + 15x + 53 = 0. \\
 &\quad D = 225 - 212 = 13,
 \end{aligned}$$

$x = \frac{-15 \pm \sqrt{13}}{2}$. Из всех этих неравенств заключаем, что $x \in (\frac{-15 + \sqrt{13}}{2}; -4]$.

Ответ: $(\frac{-15 + \sqrt{13}}{2}; -4]$.