

Моя тригонометрия

$$\sin x = a.$$

1). $\sin x = 0$, $x = \pi k$, k – любое целое число;



2). $\sin x = 1$, $x = \pi / 2 + 2\pi k$, k – любое целое число;



3). $\sin x = -1$, $x = -\pi / 2 + 2\pi k$, k – любое целое число;



4). $\sin x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

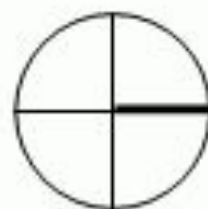
5). $\sin x = a$, $|a| \leq 1$, $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, k – любое целое число.

$$\cos x = a.$$

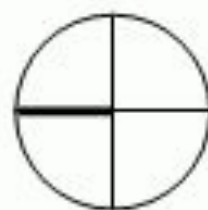
1). $\cos x = 0$, $x = \pi / 2 + \pi k$, k – любое целое число;



2). $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, k – любое целое число;



3). $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$, k – любое целое число;



4). $\cos x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

5). $\cos x = a$, $|a| \leq 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, k – любое целое число.

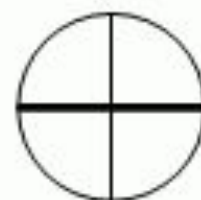
*Условные обозначения :

$\tan$ - тангенс

$\cot$ - котангенс

$$\tan x = a .$$

- 1). $\tan x = 0$, $x = \pi k$, k – любое целое число;
- 2). $\tan x = a$, $x = \arctan a + \pi k$, k – любое целое число.



$$\cot x = a .$$

- 1). $\cot x = 0$, $x = \pi / 2 + \pi k$, k – любое целое число;
- 2). $\cot x = a$, $x = \operatorname{arccot} a + \pi k$, k – любое целое число.



МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: 1. *преобразование уравнения* для получения его простейшего вида (см. выше)

2. *решение* полученного простейшего тригонометрического уравнения.

Существует семь основных методов решения тригонометрических уравнений.

1. Алгебраический метод. Этот метод нам хорошо известен из алгебры (метод замены переменной и подстановки).

Пр и м е р . Решить уравнение: $2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$.

Р е ш е н и е . Используя формулы приведения, имеем:

$$2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \cos(x + \pi/6) + 1 = 0,$$

делаем замену: $\cos(x + \pi/6) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

находим корни: $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, откуда следуют два случая:

$$1). \cos(x + \pi/6) = 1, \quad 2). \cos(x + \pi/6) = 1/2,$$

$$x + \pi/6 = 2\pi k,$$

$$x + \pi/6 = \pm \arccos(1/2) + 2\pi n,$$

$$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k;$$

$$x_2 = \pm \pi/3 - \pi/6 + 2\pi n.$$

2. Разложение на множители. Этот метод рассмотрим на примерах.

Пример 1. Решить уравнение: $\sin x + \cos x = 1$.

$$\sin x - 2 \sin^2 (x / 2) = 0 ,$$

$$2 \sin (x / 2) \cdot \cos (x / 2) - 2 \sin^2 (x / 2) = 0 ,$$

$$2 \sin (x / 2) \cdot [\cos (x / 2) - \sin (x / 2)] = 0 ,$$

$$1). \sin (x / 2) = 0 , \quad 2). \cos (x / 2) - \sin (x / 2) = 0 ,$$

$$x / 2 = \pi k ,$$

$$\tan (x / 2) = 1 ,$$

$$x_1 = 2\pi k ;$$

$$x / 2 = \arctan 1 + \pi n ,$$

$$x / 2 = \pi / 4 + \pi n ,$$

$$x_2 = \pi / 2 + 2\pi n .$$

2. Разложение на множители.

Пр и м е р 2. Решить уравнение: $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

Р е ш е н и е . $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$,

$$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0,$$

$$\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0,$$

$$1). \sin x = 0,$$

$$x_1 = \pi k;$$

$$2). \cos x - \sin x = 0,$$

$$\tan x = 1,$$

$$x_2 = \pi / 4 + \pi n,$$

2. Разложение на множители.

Пр и м е р 3. Решить уравнение: $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.

Р е ш е н и е . $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$,

$$2 \cos 4x \cos 2x = 2 \cos^2 4x ,$$

$$\cos 4x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = 0 ,$$

$$\cos 4x \cdot 2 \sin 3x \cdot \sin x = 0 ,$$

$$1). \cos 4x = 0 , \qquad 2). \sin 3x = 0 , \qquad 3). \sin x = 0 ,$$

$$4x = \pi / 2 + \pi k , \qquad 3x = \pi n , \qquad x_3 = \pi m .$$

$$x_1 = \pi / 8 + \pi k / 4 ; \qquad x_2 = \pi n / 3 ;$$

3. Приведение к однородному уравнению.

Уравнение называется *однородным относительно $\sin$ и $\cos$* , если все его члены одной и той же степени относительно $\sin$ и $\cos$ одного и того же угла.

Чтобы решить однородное уравнение, надо:

- а) перенести все его члены в левую часть;
- б) вынести все общие множители за скобки;
- в) приравнять все множители и скобки нулю;
- г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на $\cos$ (или $\sin$) в старшей степени;
- д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно $\tan$.

П р и м е р . Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2$.

Р е ш е н и е . $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$$\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0 ,$$

$$\tan^2 x + 4 \tan x + 3 = 0 , \text{ откуда } y^2 + 4y + 3 = 0 ,$$

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, откуда

$$1) \tan x = -1, \quad 2) \tan x = -3,$$

$$x_1 = -\pi/4 + \pi k; \quad x_2 = -\arctan 3 + \pi n.$$

4. Переход к половинному углу.

Рассмотрим этот метод на примере:

Пример . Решить уравнение: $3 \sin x - 5 \cos x = 7$.

Решение .

$$\begin{aligned} 6 \sin (x / 2) \cdot \cos (x / 2) - 5 \cos ^2 (x / 2) + 5 \sin ^2 (x / 2) &= \\ &= 7 \sin ^2 (x / 2) + 7 \cos ^2 (x / 2) , \\ 2 \sin ^2 (x / 2) - 6 \sin (x / 2) \cdot \cos (x / 2) + 12 \cos ^2 (x / 2) &= 0 , \\ \tan ^2 (x / 2) - 3 \tan (x / 2) + 6 &= 0 , \end{aligned}$$

5. Введение вспомогательного угла.

Рассмотрим уравнение вида:

$$a \sin x + b \cos x = c ,$$

где a, b, c – коэффициенты; x – неизвестное.

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$ (корректно ли это?) :

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\cos \varphi} \sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\sin \varphi} \cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{C} ,$$
$$\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cdot \cos x = C ,$$

или $\sin (x + \varphi) = C ,$

и его решение: $x = (-1)^k \cdot \arcsin C - \varphi + \pi k ,$

где $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$

Заметим, что введённые обозначения $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ взаимно заменяемы.

Пример. Решить уравнение: $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 1$.

Решение. Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1}=2$:

$$(\sqrt{3}/2) \cdot \sin 3x - (1/2) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\cos(\pi/6) \cdot \sin 3x - \sin(\pi/6) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\sin(3x - \pi/6) = 1/2,$$

отсюда, $x = (-1)^k \cdot \pi/18 + \pi/18 + \pi k/3$.

6. Преобразование произведения в сумму.

Здесь используются соответствующие формулы.

П р и м е р . Решить уравнение: $2 \sin 2x \cdot \sin 6x = \cos 4x$.

Р е ш е н и е . Преобразуем левую часть в сумму:

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x ,$$

$$\cos 8x = 0 ,$$

$$8x = \pi / 2 + \pi k ,$$

$$x = \pi / 16 + \pi k / 8 .$$

7. Универсальная подстановка.

Рассмотрим этот метод на примере.

П р и м е р . Решить уравнение: $3 \sin x - 4 \cos x = 3$.

Р е ш е н и е . Здесь возможны два случая:

1). $x \neq (2m + 1)\pi$, тогда

$$3 \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} - 4 \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = 3,$$

$$6 \tan(x/2) - 4 + 4 \tan^2(x/2) = 3 + 3 \tan^2(x/2),$$

$$\tan^2(x/2) + 6 \tan(x/2) - 7 = 0,$$

делаем замену: $\tan(x/2) = u$, тогда $u^2 + 6u - 7 = 0$,

корни этого уравнения: $u_1 = -7$, $u_2 = 1$.

Тригонометрические уравнения

Решить уравнения:

$$12.001. \quad \cos 3x - \sin x = \sqrt{3} (\cos x - \sin 3x).$$

$$12.002. \quad \sin z \cdot \sin (60^\circ - z) \cdot \sin (60^\circ + z) = 1/8$$

$$12.003. \quad \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x = 0.25 \sin 12x.$$

$$12.004. \quad \sin x \cdot \sin 3x + \sin 4x \cdot \sin 8x = 0.$$

$$12.005. \quad 3\sin 5z - 2\cos 5z = 3.$$

$$12.007. \quad \sin^3 z \cdot \cos z - \sin z \cdot \cos^3 z = \sqrt{2}/8.$$

$$12.008. \quad \frac{\cot 2z}{\cot z} + \frac{\cot z}{\cot 2z} + 2 = 0.$$

$$12.009. \quad \cos 9x - 2\cos 6x = 2.$$