

**Презентация по теме «Исследование функций
с применением производной» (11 класс)**

**Учительство - не труд, а отречение,
Умение всего себя отдать,
Уйти на долгий подвиг и мученье,
И в этом видеть свет и благодать.
Учительство - когда в глазах
холодных
Зажжется понимания заря,
И ты поймешь: старался не
бесплодно
И знания разбрасывал не зря.**

Автор: Екимова Г.П., учитель математики

Исследование функций с применением производной

1. Исследование функции на экстремумы;
2. Исследование функции на **возрастание/ убывание**;
3. Исследование функции на **наибольшие и наименьшие** значения на отрезке;
4. Исследование **функции с помощью графика ее производной** (чтение графика производной)

Исследование функции на возрастание (убывание)

$f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала, то функция $y=f(x)$ возрастает на этом интервале.

$$f'(x) > 0, x \in (a;b) \Rightarrow f(x) \text{ возрастает на } (a;b)$$

Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, то функция $y=f(x)$ убывает на этом интервале.

$$f'(x) < 0, x \in (a;b) \Rightarrow f(x) \text{ убывает на } (a;b)$$

Исследование функции на экстремумы

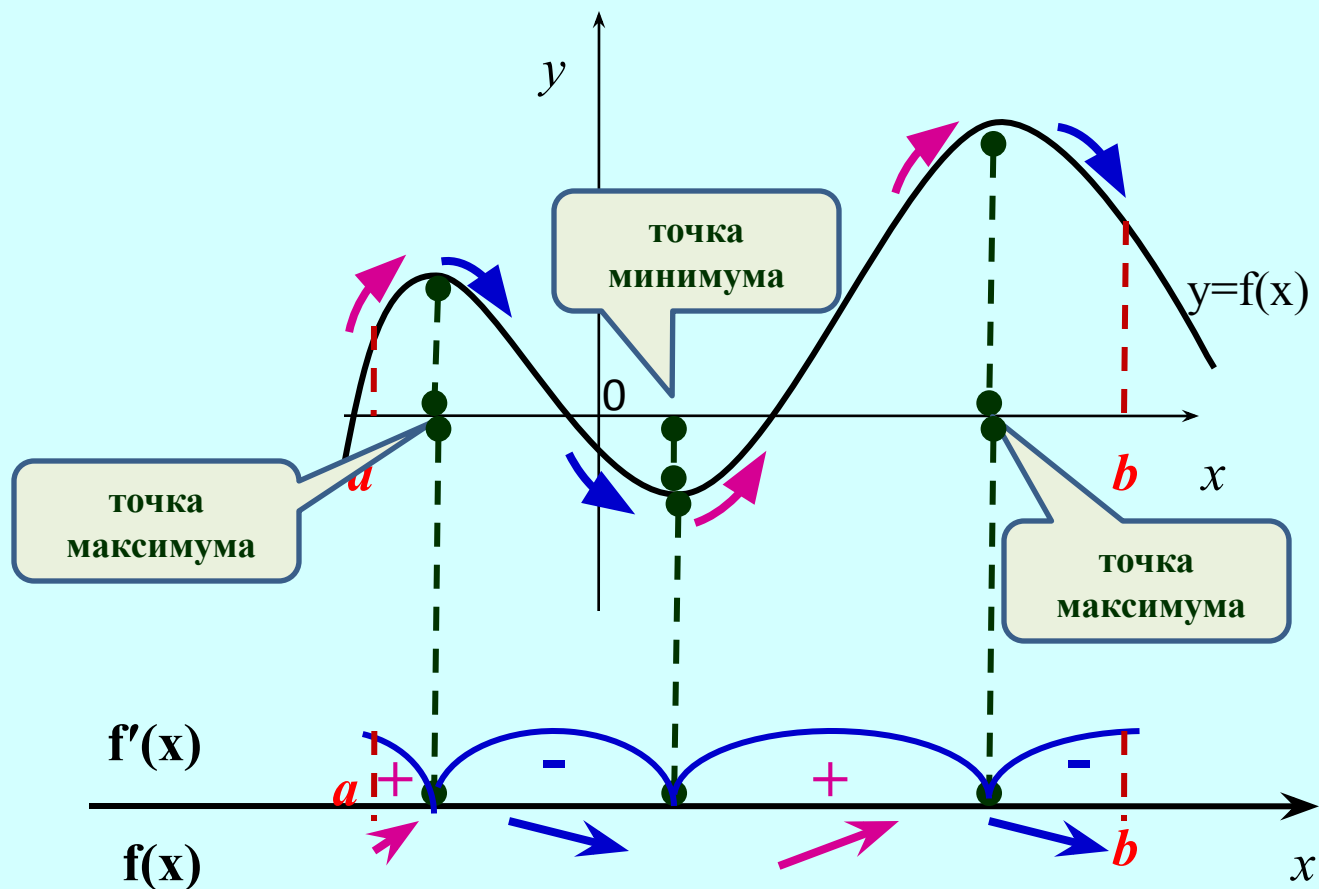
Признак максимума. Если функция $f(x)$ – непрерывна в точке x_0

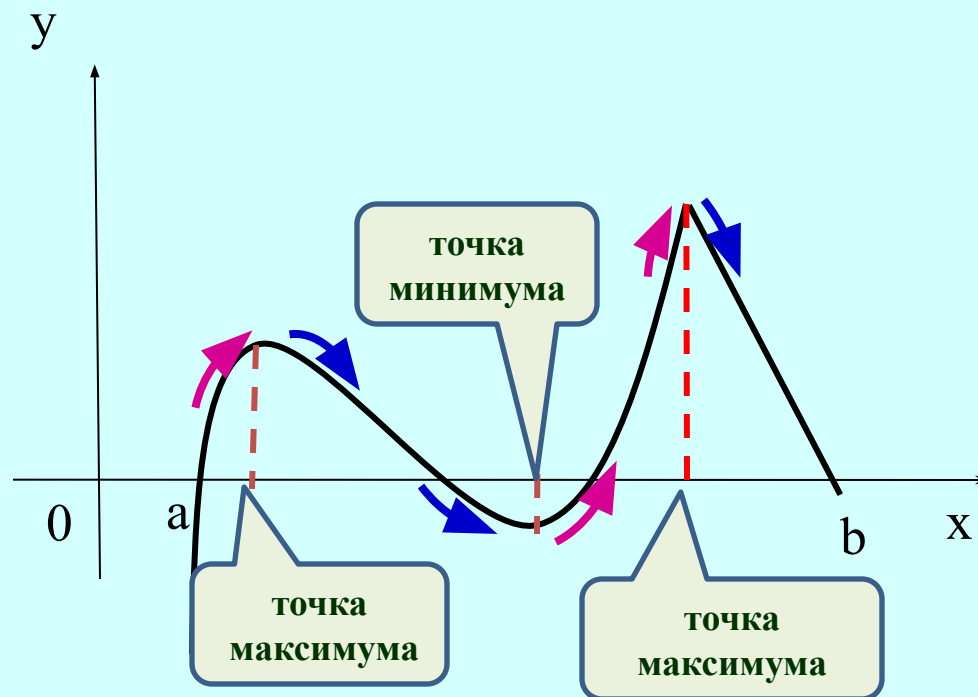
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0, x \in (a; x_0) \\ f'(x) < 0, x \in (x_0; b) \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 \text{ точка максимума}$$

Признак минимума. Если функция $f(x)$ – непрерывна в точке x_0

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0, x \in (a; x_0) \\ f'(x) > 0, x \in (x_0; b) \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 \text{ точка минимума}$$

Графическая интерпретация





1. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 48x + 17$

Найти область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$

Алгоритм	
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 48$
2. Найти стационарные ($f'(x)=0$) и критические точки ($f'(x)$ не существует)	2) $y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x - 4)(x + 4)$ $3(x - 4)(x + 4) = 0$ $x = 4, x = -4$
3. Определить знаки производной, выполнить графическую иллюстрацию.	

Точка
минимума

Ответ:

Реши самостоятельно!

2. Найдите точку максимума
функции $y = 9 - 4x + 4x^2 - x^3$



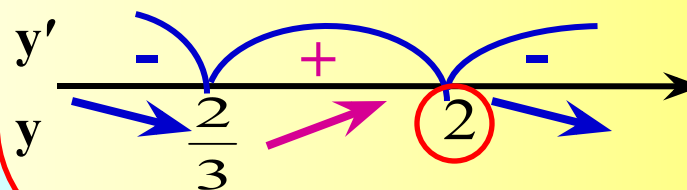
Проверь себя: $D(y) = (-\infty; +\infty)$

$$y' = -4 + 8x - 3x^2$$

$$-4 + 8x - 3x^2 = 0$$

$$D = 16$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2$$



Ответ:

2

Реши самостоятельно!

3. Найдите точку максимума
функции $y = x^3 + 5x^2 + 3x + 2$



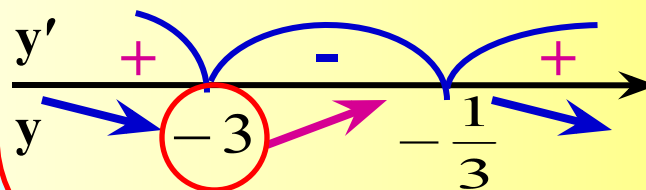
Проверь себя: $D(y) = (-\infty; +\infty)$

$$y' = 3x^2 + 10x + 3$$

$$3x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$D = 64$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -3$$



Ответ:

-3

4. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1$$

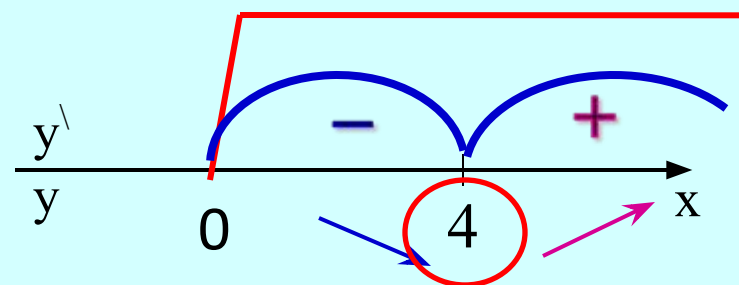
$$D(y) : x \geq 0$$

$$y' = x^{\frac{1}{2}} - 2 = \sqrt{x} - 2$$

$$\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$



Ответ:

4

1. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 2x^3 + 1$ на отрезке $[-4; 0]$

Алгоритм	
1. Найти $f'(x)$	
2. Найти стационарные ($f'(x)=0$) и критические точки ($f'(x)$ не существует) лежащие внутри отрезка $[a;b]$	Критических точек нет
3. Вычислить значение функции на концах отрезка и в отобранных точках (см. п.2)	
4. Выбрать наименьшее значение ($y_{\min}$)	

Ответ:

Реши самостоятельно!

2. Найдите наибольшее значение функции $y = 4x^2 - 4x - x^3$ на отрезке $[1;3]$



Проверь себя:

$$y' = 8x - 3x^2 - 4$$

$$-3x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$D = 16$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2$$

$$y(1) = -1$$

$$y(3) = -3$$

$$y(2) = 0$$

Ответ:

0

Реши самостоятельно!

3. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-3)(x+3)^2$ на отрезке $[-2;2]$

$$(uv)' = u'v + uv'$$



Проверь себя:

$$y' = (x+3)^2 + 2(x+3)(x-3)$$

$$(x+3)(x+3+2x-6) = 0$$

$$\begin{cases} x+3=0 \\ 3x-3=0 \end{cases}$$

$$x_1 = -3, x_2 = 1$$

$$y(-2) = -5$$

$$y(2) = -25$$

$$y(1) = -32$$

Ответ:

-32

Реши самостоятельно!

4. Найдите наибольшее значение функции $y = (x - 10)(x^2 - 11x + 10)$ на отрезке $[-1; 7]$



Проверь себя:

$$y' = (x^2 - 11x + 10) + (x - 10)(2x - 11)$$

$$3x^2 - 42x + 120 = 0$$

$$x^2 - 14x + 40 = 0$$

$$x_1 = 4, x_2 = 10$$

$$y(-1) = -242$$

$$y(7) = 54$$

$$y(4) = 108$$

Ответ:

108

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 16}{x} \quad \text{на отрезке } [2; 8]$$

$$D(y) : x \neq 0$$

$$y = x + 16 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{x^2}{x} + \frac{16}{x}$$

$$y = x + 16 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 1 + 16 \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2}$$

$$\frac{x^2 - 16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Стационарные точки
 $x = -4; 4$

Критическая точка
 $x = 0$

$$-4 \notin [2; 8]$$

$$0 \notin [2; 8]$$

$$4 \in [2; 8]$$

$$y(2) = 10 \quad y(8) = 10 \quad y(4) = 8$$

Ответ:

Реши самостоятельно!

6. Найдите наибольшее значение

функции $y = \frac{x^2 + 7x + 49}{x}$

на отрезке $[-14; -1]$



Проверь себя: $y = \frac{x^2}{x} + \frac{7x}{x} + 49 \cdot \frac{1}{x}$

$$y = x + 7 + 49 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 1 + 0 + 49 \cdot \left(-\frac{x}{x^2} \right)$$

$$y' = 1 + 49 \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$\frac{x^2 - 49}{x^2} = 0$$

$x = -7, x = 7, x \neq 0$

$$y(-14) = -10,5$$

$$y(-1) = -43$$

$$y(-7) = -7$$

Ответ:

-7

Реши самостоятельно!

7. Найдите наибольшее значение

функции $y = \frac{250 + 50x - x^3}{x}$

на отрезке $[-10; -1]$



Проверь себя: $y = -\frac{x^3}{x} + \frac{50x}{x} + 250 \cdot \frac{1}{x}$

$$y = -x^2 + 50 + 250 \cdot \frac{1}{x} \quad -2x^3 = 250$$

$$y' = -2x + 0 + 250 \cdot \left(-\frac{x^1}{x^2} \right) \quad x^3 = -125$$

$$y' = -2x + 250 \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \quad x = -5, x \neq 0$$

$$\frac{-2x^3 - 250}{x^2} = 0$$

$$y(-10) = -75$$

$$y(-1) = -201$$

$$y(-5) = -25$$

Ответ:

-25